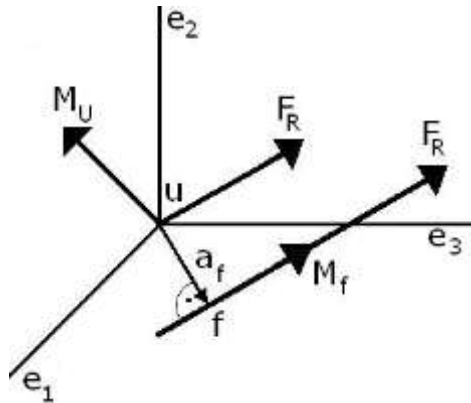


## 2 Berechnungen aus der Statik

### 2.1 Dynamie



**Bild 2-1**  
Darstellung der Dynamie

Wird die resultierende Kraft  $F_R$  senkrecht aus der Ebene, die  $F_R$  und  $M_U$  aufspannen, so um den Vektor  $a_f$  verschoben, dass resultierende Kraft und Moment die gleiche Richtung haben, so bezeichnet man dieses Vektorpaar  $(F_R, M_f)$  als *Dynamie (Kraftschraube)*. Der Ortsvektor  $a_f$  des Fußpunktes  $f$  bezüglich des Ursprungs  $u$  (Bild U-2-1) ergibt sich in seiner Komponentendarstellung aus

$$a_{fi} = \frac{1}{|F_R|^2} (F_{Rp} \cdot M_{Uq} - F_{Rq} \cdot M_{Up}), i = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Für die Zähler gilt folgende Zuordnung

i	p	q
1	2	3
2	3	1
3	1	2

Mit Hilfe des Parameters  $b$

$$b = \frac{F_R \cdot M_U}{|F_R|^2} = \frac{1}{|F_R|^2} \sum_{i=1}^3 F_{Ri} \cdot M_{Ui}, \quad (2.2)$$

lässt sich der auf den Fußpunkt  $f$  (Bild U-2-1) bezogene Momentenvektor  $M_f$  berechnen

$$M_f = b \cdot F_R = b \sum_{i=1}^3 F_{Ri}. \quad (2.3)$$

**Tabelle 2.1** Struktogrammteil zur Bestimmung einer Dyname, ergänzend zum vorhandenen Programm

Beschriftung der Felder	
Ortsvektor zur Dyname	i=1, 1, 3
	$a_{fi} = \frac{1}{ F_R ^2} (F_{Rp} \cdot M_{Uq} - F_{Rq} \cdot M_{Up})$
	$b = b + F_{Ri} \cdot M_{Ui}$
$b = \frac{1}{ F_R ^2} \cdot b$	
Moment der Dyname	i=1, 1, 3
	$M_{fi} = b \cdot F_{Ri}$

Die Prozedur `Kräfte_Auswertung` in Codeliste 2-2 erhält am Ende nachfolgenden Zusatz:

**Codeliste 2-1** Bestimmung der Dyname

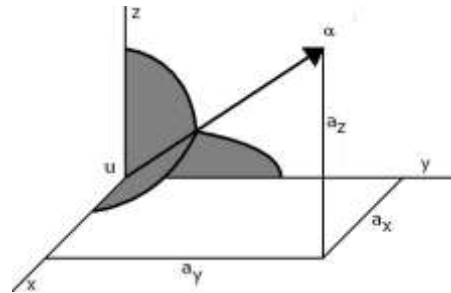
```

'
'Ortsvektor zur Dyname
Range("G3") = "Ortsvektor a(x)"
Range("G4") = "Ortsvektor a(y)"
Range("G5") = "Ortsvektor a(z)"
Range("G6") = "Moment Mf(x)"
Range("G7") = "Moment Mf(y)"
Range("G8") = "Moment Mf(z)"
ReDim af(3), Mf(3)
b = 0
For j = 1 To 3
    af(j) = (SumF(p(j)) * SumM(q(j)) - SumF(q(j)) * SumM(p(j))) /
(Val(Range("H1") ^ 2))
    Range("H" + Right(Str(j + 2), 1)).Value = Str(af(j))
    b = b + SumF(j) * SumM(j)
Next j
b = b / (Val(Range("H1") ^ 2))
For j = 1 To 3
    Mf(j) = b * SumF(j)
    Range("H" + Right(Str(j + 5), 1)).Value = Str(Mf(j))
Next j
End Sub

```

## 2.2 Richtungswinkel

Außer der Möglichkeit der Komponentenangabe, gibt es zur Richtungsangabe eines Vektors zum Ursprung und den Koordinaten, die Angabe der *Richtungswinkel* (Bild 2-2).



**Bild 2-2**  
Richtungswinkel

Für den Betrag des Vektors gilt

$$|\alpha| = \sqrt{\sum_{i=x,y,z} a_i^2}. \quad (2.4)$$

Die Richtungswinkel bestimmen sich aus

$$\varphi_i = \arccos \frac{a_i}{|\alpha|}. \quad (2.5)$$

**Tabelle 2.2** Struktogramm zur Bestimmung der Richtungswinkel eines Vektors aus den vorhandenen Komponenten.

Eingabe der Komponenten	
$ \alpha  = \sqrt{\sum_{i=x,y,z} a_i^2}$	
i=1, 1, 3	
$\varphi_i = \arccos \frac{a_i}{ \alpha }$	
Ausgabe der Richtungswinkel und des Vektorbetrags	

Dieses Hilfsprogramm kann sowohl als ein eigenständiges Programm installiert werden, als auch zusammen mit den anderen Prozeduren. Diese Wahl überlasse ich dem Leser. Wird ein eigenes Tabellenblatt genutzt, muss dieses wieder einen eigenen Namen bekommen und einen entsprechenden Aufruf aus einer Symbolleiste. Ich habe es im Programmcode bei Tabelle 1 gelassen.

**Codeliste 2-2** Bestimmung der Richtungswinkel

```
Option Explicit
Dim i As Integer
'
'Prozedur zur Erstellung eines Formblatts
Sub Formblatt()
'
'Tabelle löschen
Worksheets("Tabelle1").Activate
Worksheets("Tabelle1").Cells.Clear
'
'Formblatt
Range("A1").ColumnWidth = 5
For i = 1 To 3
Cells(i + 1, 1) = i
Next i
Range("B1:D1").ColumnWidth = 15
Range("B1").Value = "Komponenten"
Range("C1").Value = "Richtungswinkel"
Range("D1").Value = "Betrag"
Columns("B:D").Select
Selection.NumberFormat = "0.00"
Range("B2").Select
End Sub
'
'Prozedur zur Bestimmung der Richtungswinkel
Sub Auswertung()
Dim a As Double, x As Double

'Betrag des Vektors
a = 0
For i = 1 To 3
a = a + Cells(i + 1, 2) * Cells(i + 1, 2)
Next i
Cells(2, 4) = Sqr(a)

'Richtungskosinus
If a > 0 Then
For i = 1 To 3
x = Cells(i + 1, 2) / Cells(2, 4)
x = Atn(-x / Sqr(-x * x + 1)) + 2 * Atn(1)
'Umrechnung Bogenmaß->Gradmaß
Cells(i + 1, 3) = x * 180 / (4 * Atn(1))
Next i
```

```
End If
End Sub
```

## Beispiel 2.2 Eisenbahnbrücke - Ergänzung

Das berechnete Beispiel aus dem Buch als Testbeispiel einbauen. Dabei sollten die zur Berechnung notwendigen Daten durch den Aufruf eines Menüelementes in die Tabelle eingetragen werden. Die anschließenden Aufrufe der Resultierenden und der Berechnung ergeben dann das Ergebnis.



**Bild 2-3**  
Erweiterte Menüelemente

### Codeliste 2-3 Testbeispiel

```
Sub Test_K1 ()
    Range ("D3") = 270
    Range ("E3") = -9000
    Range ("F4") = 126.9
    Range ("G4") = ""
    Range ("H4") = 1
    Range ("F5") = 180
    Range ("G5") = ""
    Range ("H5") = 2
End Sub
Sub Test_K2 ()
    Range ("D3") = 306.87
    Range ("E3") = -11254.44
    Range ("F4") = 153.43
    Range ("G4") = ""
    Range ("H4") = 3
```

```
Range("F5") = 233.13
Range("G5") = ""
Range("H5") = 4
End Sub
Sub Test_K3()
Range("D3") = 0
Range("E3") = 6757.4
Range("D4") = 53.13
Range("E4") = 5114.67
Range("F4") = 113.2
Range("G4") = ""
Range("H4") = 5
Range("F5") = 180
Range("G5") = ""
Range("H5") = 6
End Sub
Sub Test_K4()
Range("D3") = 293.2
Range("E3") = -4451.73
Range("D4") = 333.43
Range("E4") = -10981.24
Range("F4") = 180
Range("G4") = ""
Range("H4") = 7
Range("F5") = 246.8
Range("G5") = ""
Range("H5") = 8
End Sub
Sub Test_K5()
Range("D3") = 0
Range("E3") = 11579.93
Range("D4") = 66.8
Range("E4") = 9795.67
Range("F4") = 113.2
Range("G4") = ""
Range("H4") = 9
Range("F5") = 180
Range("G5") = ""
Range("H5") = 10
End Sub
Sub Test_K6()
Range("D3") = 0
Range("E3") = -15434.15
Range("D4") = 293.2
Range("E4") = -9795.67
```

```
Range ("F4") = 206.57
Range ("G4") = ""
Range ("H4") = 11
Range ("F5") = 246.8
Range ("G4") = ""
Range ("H5") = 12
End Sub
Sub Test_K7 ()
Range ("D3") = 0
Range ("E3") = 19297.79
Range ("D4") = 66.8
Range ("E4") = 25829.68
Range ("D5") = 270
Range ("E5") = 36000
Range ("F4") = 126.87
Range ("G4") = ""
Range ("H4") = 13
Range ("F5") = 180
Range ("G5") = ""
Range ("H5") = 14
End Sub
Sub Test_K8 ()
Range ("D3") = 26.57
Range ("E3") = -32948.19
Range ("D4") = 306.87
Range ("E4") = 15323.78
Range ("D5") = ""
Range ("E5") = ""
Range ("F4") = 233.13
Range ("G4") = ""
Range ("H4") = 15
Range ("F5") = ""
Range ("G5") = ""
Range ("H5") = ""
End Sub
```

## 2.3 Lösung des linearen Gleichungssystems mit Matrizen

Die Lösung des Knotenpunktverfahrens ist die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten. Daher lässt sich das Problem auch mit Matrizenoperationen lösen.

Für den Knoten 1 ergibt die Zerlegung der Stabkräfte in x- und y-Komponenten folgenden Ansatz zur Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &= S_{1x} + S_{2x} + A_x \\ S_1 \cos 126,9^\circ + S_2 \cos 180^\circ + A_x &= 0 \\ -0,6S_1 - S_2 &= 0\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &= S_{1y} + S_{2y} + A_y \\ S_1 \sin 126,9^\circ + S_2 \sin 180^\circ + A_y &= 0 \\ 0,8S_1 + A &= 0\end{aligned}\quad (2.7)$$

Für Knoten 2

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &= S_{1x} + S_{3x} + S_{4x} \\ S_1 \cos 306,87^\circ + S_3 \cos 153,43^\circ + S_4 \cos 233,13^\circ &= 0 \\ 0,6S_1 - 0,894S_3 - 0,6S_4 &= 0\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &= S_{1y} + S_{3y} + S_{4y} \\ S_1 \sin 306,87^\circ + S_3 \sin 153,43^\circ + S_4 \sin 233,13^\circ &= 0 \\ -0,8S_1 + 0,447S_3 - 0,8S_4 &= 0\end{aligned}\quad (2.9)$$

Für Knoten 3

$$\begin{aligned}S_2 + 0,6S_4 - 0,394S_5 - S_6 &= 0 \\ 0,8S_4 + 0,919S_5 &= 0\end{aligned}\quad (2.10)$$

Für Knoten 4

$$\begin{aligned}0,894S_3 + 0,394S_5 - S_7 - 0,394S_8 &= 0 \\ -0,447S_3 - 0,919S_5 - 0,919S_8 &= 0\end{aligned}\quad (2.11)$$

Für Knoten 5

$$\begin{aligned}S_6 + 0,394S_8 - 0,394S_9 - S_{10} &= 0 \\ 0,919S_8 + 0,919S_9 &= 0\end{aligned}\quad (2.12)$$

Für Knoten 6

$$\begin{aligned}S_7 + 0,394S_9 - 0,894S_{11} - 0,394S_{12} &= 0 \\ -0,919S_9 - 0,447S_{11} - 0,919S_{12} &= 0\end{aligned}\quad (2.13)$$

Für Knoten 7

$$\begin{aligned}S_{10} + 0,394S_{12} - 0,6S_{13} - S_{14} &= 0 \\ 0,919S_{12} + 0,8S_{13} - F &= 0\end{aligned}\quad (2.14)$$



Für Knoten 8

$$\begin{aligned} 0,894S_{11} + 0,6S_{13} - 0,6S_{15} &= 0 \\ 0,447S_{11} - 0,8S_{13} - 0,8S_{15} &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Für Knoten 9

$$\begin{aligned} S_{14} + 0,6S_{15} &= 0 \\ 0,8S_{15} + B &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

So erhält man ein Gleichungssystem in Matrixform

$$A_{Koeff} \cdot S = F \quad (2.17)$$

Darin sind die Lagerkräfte A und B als unbekannt angenommen. Da die Stabkräfte als Zugkräfte angesetzt wurden, sind negative Ergebnisse als Druckkräfte zu werten. Die Koeffizientenmatrix finden Sie in dem nachfolgenden Bild 2-4, in den Zeilen von 1 bis 18 und den Spalten von 1 bis 15. In Spalte 16 befindet sich der Lösungsvektor. Mit dem Lösungsverfahren aus meinem Buch Algorithmen für Ingenieure finden wir die Lösung der Stabkräfte in Zeile 39. Zwischenergebnisseilen wurden ausgeblendet.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
4	-0,8	0	0,447	-0,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0,6	-0,394	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0,8	0,919	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0,894	0	0,394	0	-1	-0,394	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	-0,447	0	-0,919	0	0	-0,919	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	1	0	0,394	-0,394	-1	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0,919	0,919	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	1	0	0,394	0	-0,894	-0,394	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,919	0	-0,447	-0,919	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0,394	-0,6	-1	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,919	0,8	0	0	36000
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,894	0	0,6	0	-0,6	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,447	0	-0,8	0	-0,8	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,6	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8	-27000
19																
39	-11250	6750	-10982	5113,6	-4451,5	11572	-15431	9793,3	-9793,3	19289	-32957	25824	15335	20262	-33771	

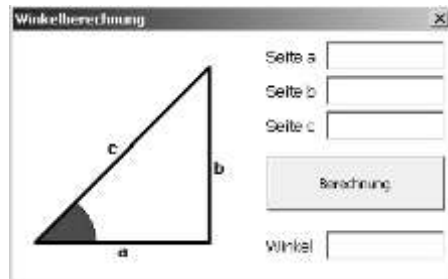
**Bild 2-4** Lösung des linearen Gleichungssystems

Das Ergebnis entspricht dem Ergebnis nach der vorherigen Methode. Abweichungen sind durch Rundungsfehler entstanden.

Der große Vorteil des Knotenpunktverfahrens liegt im einfachen schematischen Vorgehen bei der Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems.

## 2.4 Userform Winkelberechnung

Es werden immer wieder Winkelberechnungen erforderlich. Dazu erstellen wir die in Bild 2-4 dargestellte Userform, die bei Eingabe von zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, den zugehörigen Winkel bestimmt.



**Bild 2-5**  
Userform für  
Winkelberechnungen

#### Codeliste 2-4 Winkelberechnung

```

Option Explicit
Private Sub cmdBerechnung_Click()
    Dim a As Double, b As Double, c As Double
    Dim Pi As Double, w As Double, x As Double
    Pi = 3.14159
    a = Val(TextBox1)
    b = Val(TextBox2)
    c = Val(TextBox3)
    If a > 0 And b > 0 Then
        x = b / a
        w = Atn(x) * 180 / Pi
        TextBox4 = w
    Else
        If a > 0 And c > 0 Then
            x = c / a
            w = Atn(-x / Sqr(-x * x + 1)) + 2 * Atn(1) * 180 / Pi
        Else
            If b > 0 And c > 0 Then
                x = c / b
                w = Atn(x / Sqr(-x * x + 1)) * 180 / Pi
            Else
                MsgBox "Datenfehler !", vbOKOnly + vbCritical, "ACHTUNG"
            End If
        End If
    End If
End Sub

```