8 Berechnungen aus der Strömungslehre

8.1 Rotation von Flüssigkeiten in geschlossenen Behältern

Im Gegensatz zum offenen Behälter, führt bei einem geschlossenen Behälter die Betrachtung des eingeschlossenen Luftvolumens zum Ergebnis. Im ruhenden Zustand sind die Verhältnisse nach Bild 8-1 gegeben.

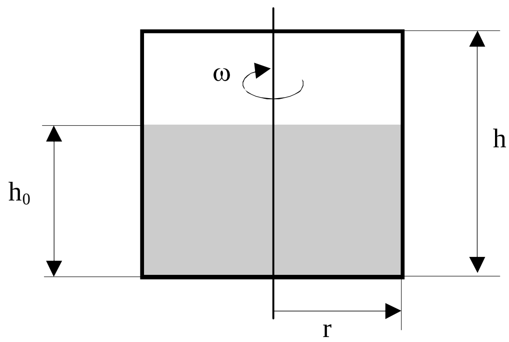


Bild 8-1
Geschlossener Zylinder
im Ruhezustand

Das eingeschlossene Luftvolumen ist

$$V_L = r^2 \cdot \pi \cdot (h - h_0)\,. \tag{8.1}$$

Mit der Annahme, dass keine Kompression stattfindet, muss sich dieses Volumen auch im Bewegungszustand wieder finden lassen. Dazu betrachten wir Bild 8-2.

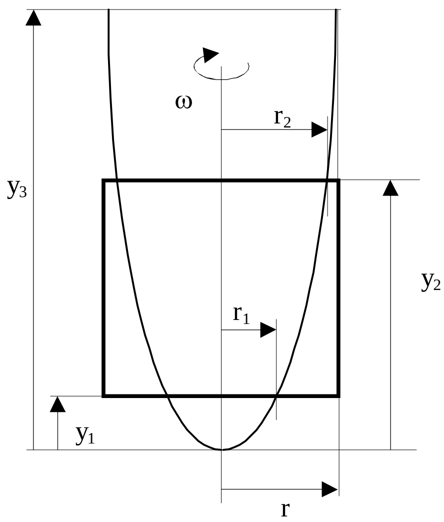


Bild 8-2
Geschlossener Zylinder
In Bewegung

Entsprechend der im Buch aufgestellten Gleichung gilt

$$y_1 = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r_1^2 , \tag{8.2}$$

$$y_2 = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r_2^2 = y_1 + h \;, \tag{8.3}$$

$$y_3 = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2 . \tag{8.4}$$

Wir setzen

$$c = \frac{2 \cdot g}{\omega^2} . \tag{8.5}$$

Die Gleichsetzung des Luftvolumens im ruhenden und bewegten Zustand ergibt

$$r^2 \cdot \pi \cdot (h - h_0) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot y_2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot y_1 . \tag{8.6}$$

Daraus folgt durch Auflösung und Einsetzung der obigen Gleichungen

$$2 \cdot r^2 \cdot (h - h_0) = r_2^2 \cdot y_2 - r_1^2 \cdot y_1 , \tag{8.7}$$

$$2 \cdot r^2 \cdot (h - h_0) = c \cdot y_2^2 - c \cdot y_1^2 , \tag{8.8}$$

$$2 \cdot r^2 \cdot (h - h_0) = c \cdot (y_1 + h)^2 - c \cdot y_1^2 , \tag{8.9}$$

$$y_1 = \frac{r^2}{c \cdot h} (h - h_0) - \frac{h}{2} . \tag{8.10}$$

Durch Einsetzen ergeben sich dann auch die anderen Werte. Ebenso kann der Verlauf berechnet werden.

Bei der Verlaufsberechnung des Rotationsparaboloiden über den Bereich x = 0,…,r mit der Funktion

$$y(x) = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot x^2 , \tag{8.11}$$

sind nur die Funktionswerte

$$y_1 \le y \le y_2 \tag{8.12}$$

von Bedeutung.

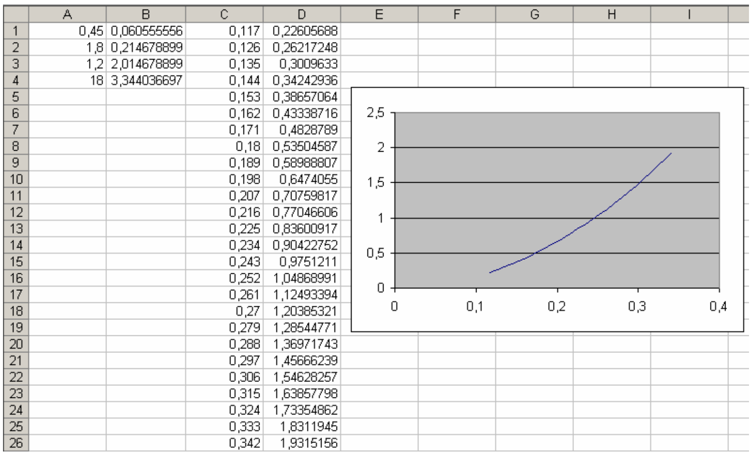
Tabelle 8.1 Struktogramm zur Berechnung des Flüssigkeitsverlaufs in geschlossenen Zylindern

<table>
<tr><td colspan="3">Eingabe r, h, h_0, ω</td></tr>
<tr><td colspan="3">$c = \frac{2 \cdot 9{,}81}{\omega^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y_1 = \frac{r^2}{c \cdot h}\left(h - h_0\right) - \frac{h}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y_2 = y_1 + h$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y_3 = \frac{r^2}{c}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\Delta x = \frac{r}{50}$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Funktions-
verlauf</td><td colspan="2">x = 0, Δx, r</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y(x) = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot x^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ist $y_1 \le y \le y_2$</td></tr>
<tr><td>Ja</td><td>Nein</td></tr>
<tr><td>Ausgabe x, y</td><td></td></tr>
</table>

Codeliste 8.1 Auswertungsprozedur

```
Option Explicit

Private Sub Rotationsparaboloid()
   Dim r, h, h0, w As Double
   Dim c, x, dx, y, y1, y2, y3 As Double
   Dim i As Integer

   r = Cells(1, 1)
   h = Cells(2, 1)
   h0 = Cells(3, 1)
   w = Cells(4, 1)

   c = 2 * 9.81 / (w * w)
   Cells(1, 2) = c
   y1 = r * r / c / h * (h - h0) - h / 2
   Cells(2, 2) = y1
   y2 = y1 + h
   Cells(3, 2) = y2
```

```
   y3 = r * r / c
   Cells(4, 2) = y3

   dx = r / 50
   i = 0
   For x = 0 To r Step dx
      y = x * x / c
      If y >= y1 And y <= y2 Then
         i = i + 1
         Cells(i, 3) = x
         Cells(i, 4) = y
      End If
   Next x

End Sub
```



	A	B	C	D
1	0,45	0,060555556	0,117	0,22605688
2	1,8	0,214678899	0,126	0,26217248
3	1,2	2,014678899	0,135	0,3009633
4	18	3,344036697	0,144	0,34242936
5			0,153	0,38657064
6			0,162	0,43338716
7			0,171	0,4828789
8			0,18	0,53504587
9			0,189	0,58988807
10			0,198	0,6474055
11			0,207	0,70759817
12			0,216	0,77046606
13			0,225	0,83600917
14			0,234	0,90422752
15			0,243	0,9751211
16			0,252	1,04868991
17			0,261	1,12493394
18			0,27	1,20385321
19			0,279	1,28544771
20			0,288	1,36971743
21			0,297	1,45666239
22			0,306	1,54628257
23			0,315	1,63857798
24			0,324	1,73354862
25			0,333	1,8311945
26			0,342	1,9315156

Bild 8-3
Berechnungsbeispiel

8.2 Gasförmige Flüssigkeiten in zylindrischen Rohren

Wir betrachten nachfolgend den Druck- und Geschwindigkeitsverlauf bei einer Rohrströmung von gasförmigen Flüssigkeiten. In Folge der meist hohen Strömungsgeschwindigkeiten und der dabei auftretenden größeren Druckverluste liegt eine expandierende Strömung vor.

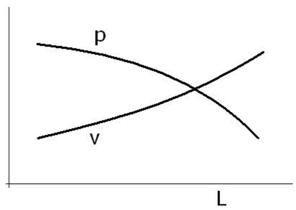


Bild 8-4
Druck und Geschwindigkeitsverlauf bei Rohrströmungen von gasförmigen Flüssigkeiten

Die Anwendung der Kontinuitätsgleichung

$$w_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot w_1 \tag{8.13}$$

bei konstantem Rohrquerschnitt sagt aus, das bei expandierender Strömung mit den spezifischen Volumen v2 > v1 auch für die Relativgeschwindigkeiten w2 > w1 gilt.

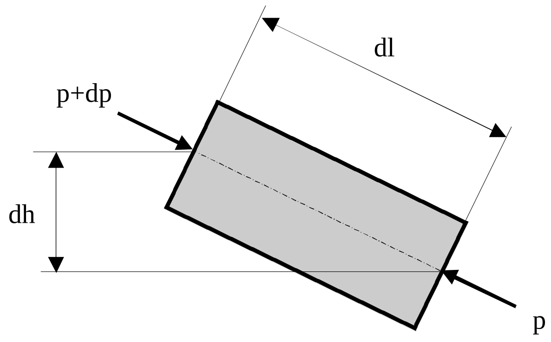


Bild 8-5
Strömungselement

Der Strömungsverlust an einem Strömungselement ergibt sich nach dem Gesetz von Darcy

$$dp + \gamma \cdot dh = -\lambda \cdot \frac{dl}{d} \cdot \frac{w^2}{2 \cdot v} \,. \tag{8.14}$$

Darin ist λ die Rohrreibungszahl. Der Anteil der Druckänderung durch Höhenänderung $\gamma \cdot dh$ ist vernachlässigbar gering. Nach dem allgemeinen Gasgesetz

$$p \cdot v = R \cdot T \,, \tag{8.15}$$

folgt über die Gaskonstante

$$R = \frac{p_1 \cdot v_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot v_2}{T_2} \tag{8.16}$$

für die Volumenänderung

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \,. \tag{8.17}$$

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (8.13) erhalten wir aus der Differentialgleichung (8.14)

$$dp = -\lambda \cdot \frac{w_1^2 \cdot p_1 \cdot T_2}{2 \cdot d \cdot v_1 \cdot p_2 \cdot T_1} \cdot dl \,. \tag{8.18}$$

Die Integration führt auf die Lösung einer quadratischen Gleichung

$$\Delta p = p_1 \left(1 - \sqrt{1 - \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{{w_1}^2}{v_1} \cdot \frac{T_2}{T_1}} \right). \tag{8.19}$$

Für sehr kleine Werte x gilt die Näherung

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}, \tag{8.20}$$

so dass folgt

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{w_1^2}{2 \cdot v_1} \cdot \frac{T_2}{T_1}. \tag{8.21}$$

Der Temperaturabfall muss im Allgemeinen nur bei längeren Heißdampfleitungen berücksichtigt werden und wird nachfolgend vernachlässigt. Widerstände in Rohrleitungen werden oft durch adäquate Leitungslängen berücksichtigt.

Codeliste 8.2 Druckverluste bei gasförmigen Flüssigkeiten

```
Option Explicit

Private Sub GasRohrströmung()
   Dim la, w1, v1, d As Double
   Dim l, dp As Double
   Dim i As Integer

   la = Cells(1, 1)     'Rohrreibungszahl Lambda
   w1 = Cells(2, 1)     'Relativgeschwindigkeit [m/s]
   v1 = Cells(3, 1)     'Spezifisches Volumen [cbm/kg]
   d = Cells(4, 1)      'Rohrdurchmesser [m]

   i = 0
   For l = 1 To 100     'Rohrlänge 1...100 m
      dp = la * l / d * w1 * w1 / 2 / v1
      i = i + 1
      Cells(i, 2) = l
      Cells(i, 3) = dp
   Next l

End Sub
```