

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 14.01.2024

Überarbeitung:

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung:

Bestimmung der Arbeit eines expandierenden Gases in einem Zylinder.

Anwendungs-Datei: 06-09-01_Zylinderarbeit.xlsx

1 Grundlagen

Gegeben ist ein in einem Zylinder eingeschlossene Gas vom Volumen V , das mit dem Druck p auf den Kolben wirkt (Bild 1).

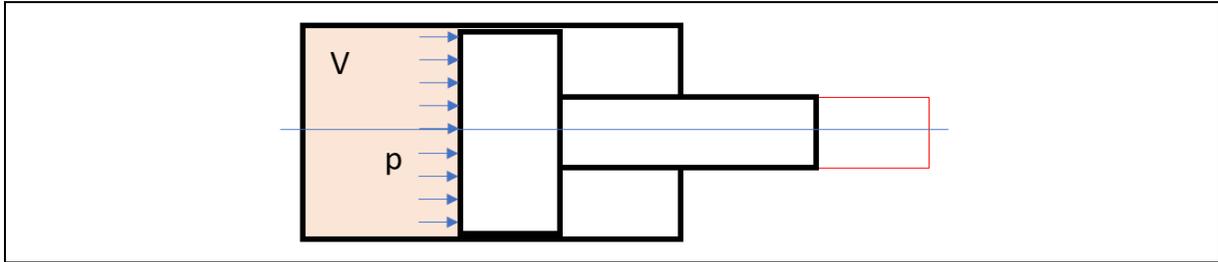


Bild 1. Rohrleitung mit Querschnittsänderung

Bei der langsamen Expansion des Gases wird der Kolben verschoben. Bei diesem Prozess werden folgende Werte (Tabelle 1) gemessen.

Tabelle 1. Messwerte

$p \cdot 10^{-5}$ [Pa = N/m ²]	V [m ³]
15	0,050
12	0,056
9	0,073
6	0,092
4	0,116
2	0,168

Die Arbeit, die bei der Expansion geleistet wird, bestimmt sich aus

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV. \quad (1)$$

Visualisiert ergibt sich die Arbeit als Fläche im p - V -Diagramm (Bild 2).

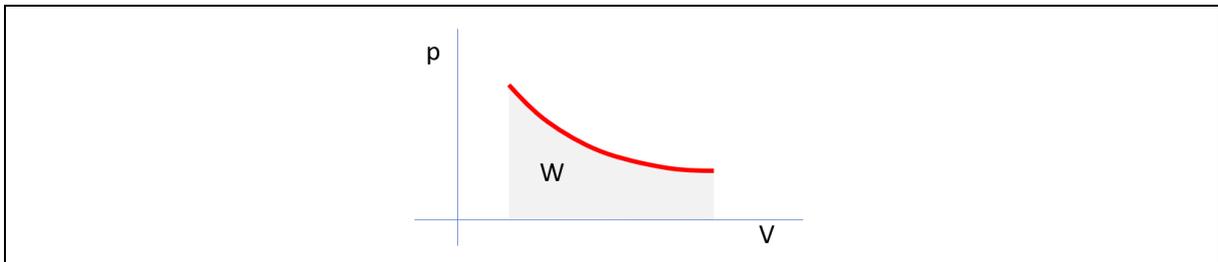


Bild 2. p - V -Diagramm

2 Numerische Integration

Ein Verfahren zur numerischen Integration wird als Trapezregel bezeichnet. Dabei werden die Trapezflächen unter der Kurve summiert (Bild 3).

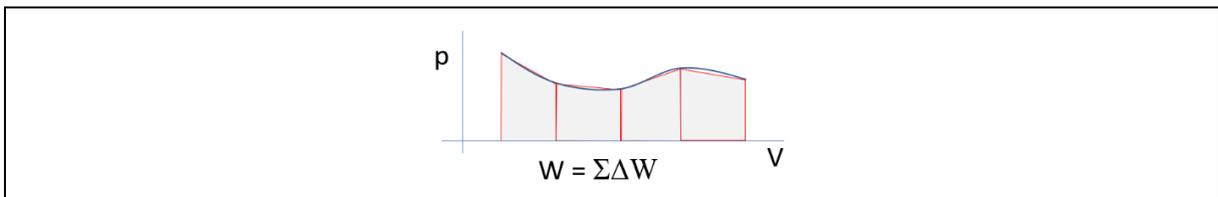


Bild 3. Trapezmethode

Zur Berechnung der Flächen benutzen wir ein Arbeitsblatt (Bild 4).

	A	B	C	D
1	$p \cdot 10^{-5}$ [Pa]	V [m ³]		ΔW [Nm]
2		15	0,05	
3		12	0,056	0,159
4		9	0,073	0,1935
5		6	0,092	0,2475
6		4	0,116	0,208
7		2	0,168	0,284
8			W =	1,092

Bild 4. Bestimmung von W nach der Trapezmethode

Tabelle 1. Formeln im Arbeitsblatt

Bereich	Formel	Hinweis
D3	$=(A2-A3)*(B2+B3)/2$	Formel nach D4:D7 ziehen
D8	$=SUMME(D3:D7)$	

3 Trendlinie verwenden

Mit den Messwerten erstellen wir im ersten Schritt ein Liniendiagramm im Arbeitsblatt (Bild 5). Damit erhalten wir eine Kurve nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

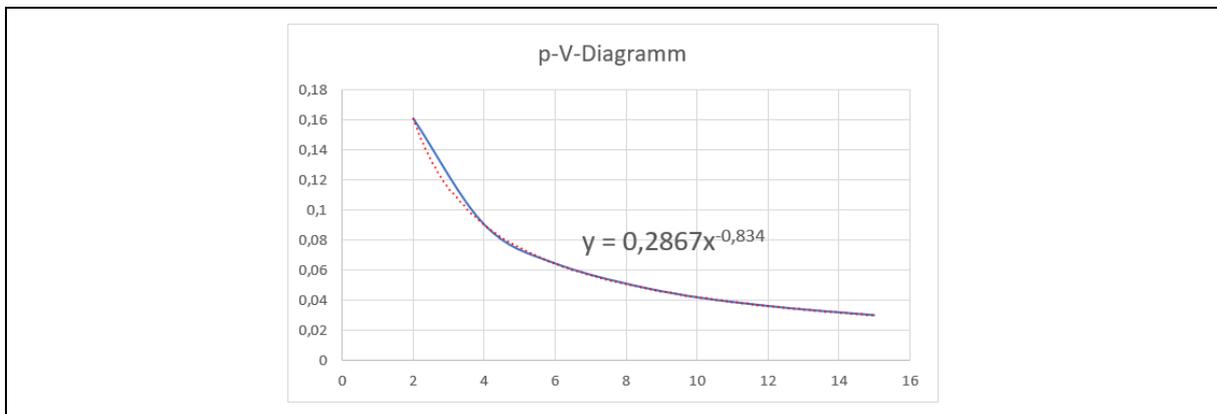


Bild 5. Liniendiagramm mit den Messwerten

Mit einem Klick auf die Kurve kann in deren Kontextmenü die Trendlinie aufgerufen werden. Unter Trendlinienoptionen kann eine exponentielle, lineare, logarithmische, polynome, als Potenz oder als gleitender Durchschnitt gewählt werden. Die beste Übereinstimmung erzielen wir mit einer Potenzfunktion. Mit der Option *Formel im Diagramm anzeigen* erhalten wir die Potenzfunktion. Sie lautet

$$y = 0,2647 x^{-0,608}. \quad (2)$$

Die Formel lautet zum Beispiel allgemein

$$p = a V^b. \quad (3)$$

Mit dem bestimmten Integral ergibt sich die Arbeit

$$W = \int_{V_1}^{V_2} a V^b \quad (4)$$

$$W = \left| \frac{a V^{b+1}}{b+1} \right|_2^{15} \quad (5)$$

$$W = \frac{a(15^{b+1} - 2^{b+1})}{b+1} \quad (6)$$

$$W = \frac{0,2647(15^{-0,608+1} - 2^{-0,608+1})}{-0,608+1} = 1,066 \text{ Nm}$$