Achsen und Wellen gleicher Festigkeit

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 14.01.2024

Überarbeitung:

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung:

Auslegung von Achsen und Wellen mit gleicher Festigkeit.

Anwendungs-Datei: 06-06-05_AchsenWellen.xlsx

1 Welle unter Biegespannung

Zur Einsparung von Werkstoff und Gewicht, besonders bei großen Wellen, kann der Wellendurchmesser entsprechend der Belastung angepasst werden. Dazu wird nicht mehr das maximale Biegemoment, sondern der Biegemomentverlauf herangezogen (Bild 1).

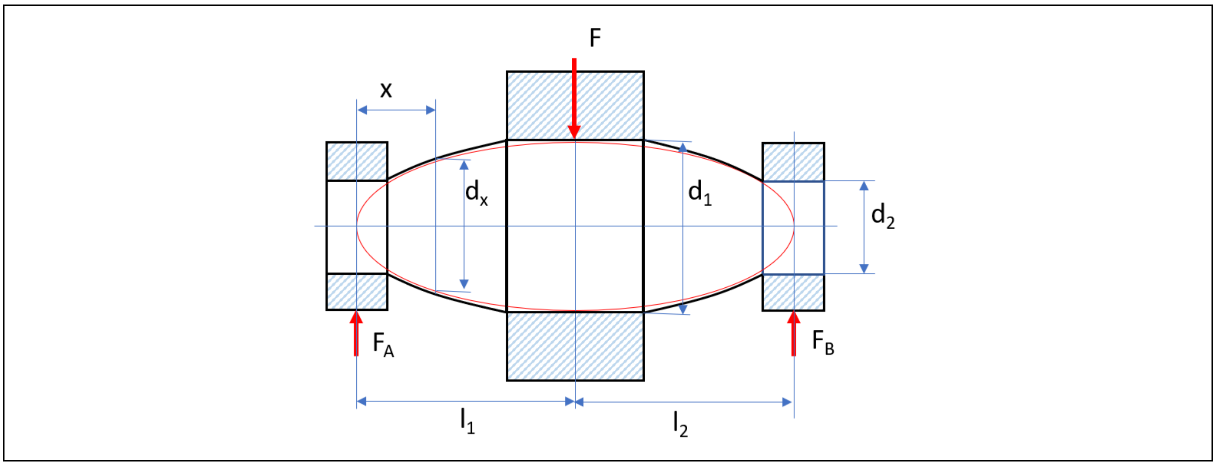

Bild 1. Wellenform mit angenähert konstanter Biegebelastung

Die allgemeine Biegespannungs-Formel lautet

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}. \tag{1}$$

Die Formel für das Widerstandsmoment lautet

$$W_b = \frac{\pi}{32}\, d^3. \tag{2}$$

Aus den Formeln folgt der erforderliche Wellendurchmesser bei zulässiger Biegespannung aus

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\, M_b}{\pi\, \sigma_{b\,zul}}} \tag{3}$$

Die Auflagerkräfte ergeben sich unter Betrachtung von (Bild 2)

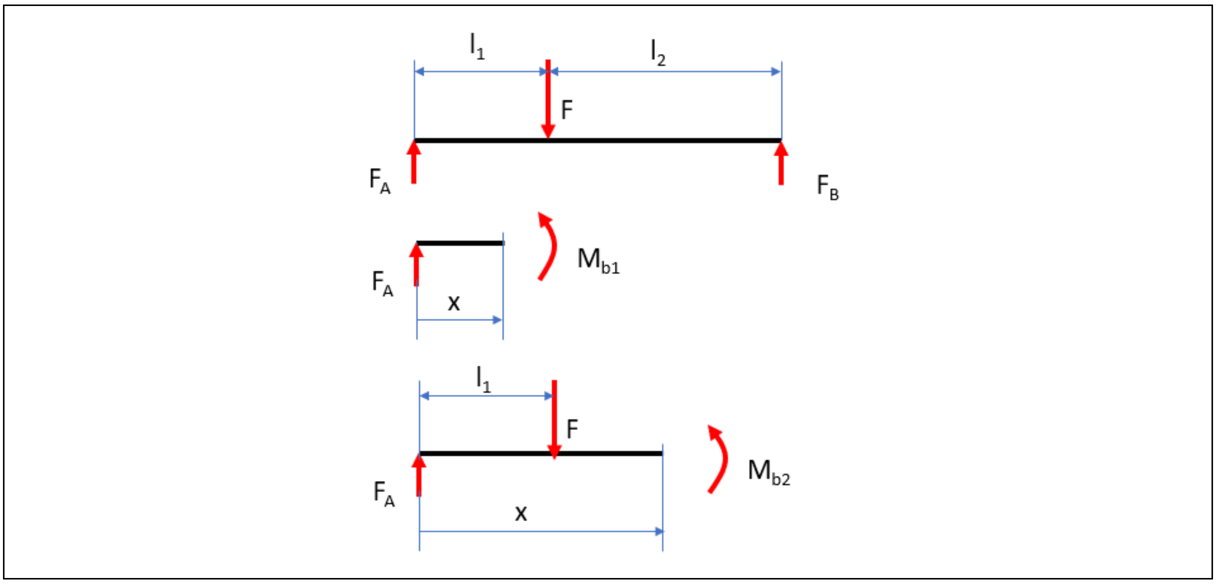

Bild 2. Kräfte und Momente an der Welle

$$F = F_A + F_B \quad | \, F_A = F - F_B. \tag{4}$$

$$F\, l_1 = F_B\,(l_1 + l_2) \quad | \, F_B = \frac{l_1}{l_1 + l_2}\, F. \tag{5}$$

Das Biegemoment im Bereich von l_1 ist

$$M_{b1} = F_A\, x \tag{6}$$

und im Bereich von l_2

$$M_{b2} = F_A\, x - F\,(x - l_1). \tag{7}$$

2 Beispiel

Unter einer Last von F = 20000 N und einer zulässigen Biegespannung von 100 N/mm^2 ist der optimale Durchmesserverlauf gesucht. Die Abmessungen sind l_1 = 300 mm und l_2 = 500 mm.

Dazu verwenden wir ein Arbeitsblatt (Bild 3).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	F =	20000	N		x_1 [mm]	M_{b1} [Nmm]	x_2 [mm]	M_{b2} [Nmm]	d_x [mm]
2	l1 =	300	mm		0	0			0
3	l2 =	500	mm		50	625000			39,93620404
4	σ_{bzul} =	100	N/mm^2		100	1250000			50,31646412
5					150	1875000			57,59797311
6					200	2500000			63,3947723
7					250	3125000			68,28994831
8	F_A =	12500	N		300	3750000	300	3750000	72,56889876
9	F_B =	7500	N				350	3375000	70,0645014
10							400	3000000	67,36699803
11							450	2625000	64,43421561
12							500	2250000	61,2069797
13							550	1875000	57,59797311
14							600	1500000	53,46922177
15							650	1125000	48,58001198
16							700	750000	42,43854944
17							750	375000	33,68349901
18							800	0	0

Bild 3. Formblatt zur Bestimmung des Momenten- und Durchmesserverlaufs

Tabelle 1. Bereichsnamen und Formeln

Bereich	Name	Bereich	Name	Formel	Bereich	Name	Formel
B1	F_	B8	FA_	=F_-FB_	F2:F8	Mb1_	=FA_*x1_
B2	l1_	B9	FB_	=l1_/(l1_+l2_)*F_	H8:H18	Mb2_	=FA_*x2_-F_*(x2_-l1_)
B3	l2_	E2:E8	x1_		I2:I7		=((32*@Mb1_)/(3,14*Szu))^(1/3)
B4	Szu	G8:G18	x2_		I8:I18		=((32*@Mb2_)/(3,14*Szu))^(1/3)

Zur Visualisierung werden zwei Diagramme erstellt, der Biegemomentverlauf (Bild 4) und der Verlauf des optimalen Durchmessers (Bild 5).

Bild 4. Verlauf des Biegemoments

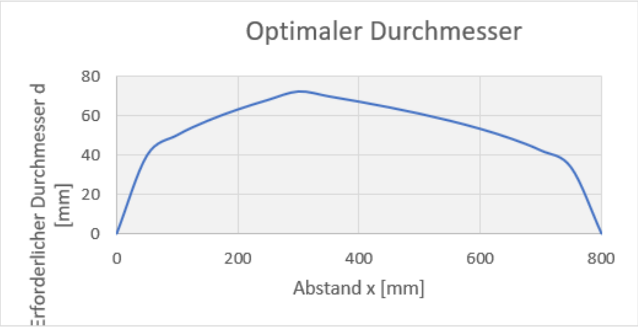

Bild 5. Optimaler Durchmesserverlauf

3 Hohlwelle

Wir gehen von der Annahme aus, dass es zu jedem Abstand ein konstantes Verhältnis gibt (Bild 6).

$$k = \frac{d_i}{d_a}. \tag{8}$$

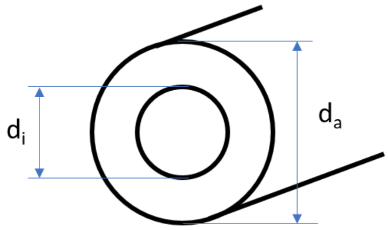

Bild 6. Durchmesser einer Hohlwelle

Das Widerstandsmoment der Hohlwelle berechnet sich aus der Formel

$$W_b = \frac{\pi}{32}\,\frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} = \frac{\pi}{32}\,d_a^3(1-k^4)\,. \tag{9}$$

Durch Umstellung folgt

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\,M_b}{\pi\,(1-k^4)\,\sigma_{b\,zul}}}. \tag{10}$$

Zur Berechnung muss das vorliegende Arbeitsblatt angepasst werden.

4 Torsionsbelastung

Es werden folgende Annahmen getroffen:

- Die Querschnitte werden nicht verformt
- Die Querschnitte bleiben in der gleichen Ebene

Mit diesen Annahmen betrachten wir ein Wellenelement (Bild 7).

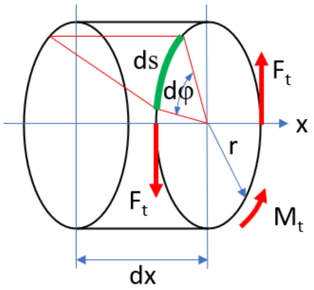

Bild 7. Torsionsbelastung eines Wellenelements

Die Formel für die Torsionsspannung lautet

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_p}. \tag{11}$$

Das polare Widerstandsmoment bestimmt sich aus

$$W_p = \frac{\pi}{16}\, d^3. \tag{12}$$

Aus den Formeln folgt der erforderliche Wellendurchmesser bei reiner Torsionsbelastung aus

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\, M_t}{\pi\, \tau_{t\, zul}}}. \tag{13}$$

Das Torsionsmoment bestimmt sich aus der

$$M_t = F_t \cdot r. \tag{14}$$

5 Biege- und Torsionsbeanspruchung

Tritt gleichzeitig eine Biege- und Torsionsbelastung auf, so muss mit der Formel

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\, \tau_t^2} \tag{15}$$

eine Vergleichsspannung bestimmt werden. Der Größe σ_v geben wir den Charakter einer Biegespannung und schreiben

$$\sigma_v = \frac{M_v}{W_b}. \tag{16}$$

Damit lässt sich die Gleichung (15) auch schreiben

$$\frac{M_v}{W_b} = \sqrt{\left(\frac{M_b}{W_b}\right)^2 + 3\, \left(\frac{M_t}{W_t}\right)^2} \tag{17}$$

Durch Umstellung folgt

$$M_v = \sqrt{M_b^2 + 3\, \left(\frac{W_b}{W_t}\right)^2 \cdot M_t^2}. \tag{18}$$

Mithilfe dieser Vergleichsspannung lässt sich ebenfalls ein optimaler Durchmesserverlauf bestimmen.