Knickung

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 10.01.2024

Überarbeitung:

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung:

Ableitung der Formel zur Bestimmung des Knickverlaufs, der größten Durchbiegung und der Knickspannung.

Anwendungs-Datei:

Betrachtet wird ein Stab zwischen zwei Flächen (Bild 1).

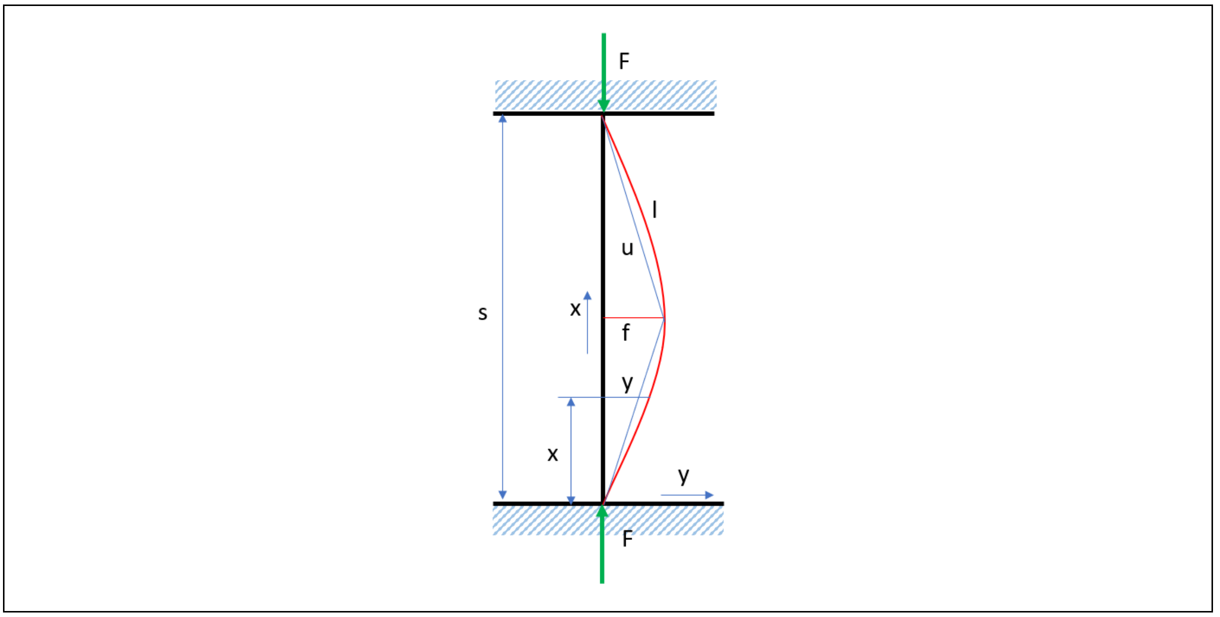

Bild 1. Belastungsfall

Die DGL der elastischen Linie lautet in diesem Fall

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} = -\frac{F}{E \cdot I} y \quad \mid \frac{F}{E \cdot I} = a^2. \tag{1}$$

Dadurch vereinfacht sich die Gleichung zu

$$y'' = -a^2 y \quad \mid y'' = \frac{dy'}{dx}. \tag{2}$$

Erweitert mit y‘

$$\frac{dy'}{dx} y' = -a^2 y \frac{dy}{dx} \tag{3}$$

$$y'\, dy' = -a^2\, y\, dy. \tag{4}$$

Durch Integration folgt

$$y' \int dy' = -a^2 \int y\, dy. \tag{5}$$

$$\frac{y'^2}{2} = -a^2 \frac{y^2}{2} + c_1 \tag{6}$$

Durch Änderung von $c_1 = c^2$ folgt

$$y'^2 = c^2 - a^2 y^2 \tag{7}$$

$$y' = \sqrt{c^2 - a^2 y^2} \tag{8}$$

$$\frac{dy}{dx} = c \sqrt{1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 y^2} \quad \mid \frac{a \cdot y}{c} = z \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dx} = c\, \sqrt{1 - z^2} \quad \mid c = \frac{a \cdot y}{z} \tag{10}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \cdot y}{z}\, \sqrt{1 - z^2} \tag{11}$$

$$dy = c\, \sqrt{1 - z^2}\, dx \tag{12}$$

$$dz \frac{c}{a} = c\, \sqrt{1 - z^2}\, dx \quad \mid \text{c gekürzt} \tag{13}$$

$$a \cdot dx = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad \mid \text{integrieren} \tag{14}$$

$$a \int dx = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad | \text{ integrieren} \tag{15}$$

$$a \cdot x + c_2 = \arcsin z \tag{16}$$

$$z = \sin(a \cdot x + c_2) \quad | \, z = \frac{a \cdot y}{c} \tag{17}$$

$$y = \frac{c}{a} \sin(a \cdot x + c_2) \tag{18}$$

$$y = \frac{c}{a} (\sin(a \cdot x) \cdot cos(c_2) + \cos(a \cdot x) \cdot sin(c_2)) \tag{19}$$

$$y = A \sin(a \cdot x) + B \cos(a \cdot x) \tag{20}$$

Randbedingungen:

$$x = 0 \ \rightarrow y = 0$$

$$x = \mathrm{s} \ \rightarrow y = 0$$

$$x = \frac{s}{2} \ \rightarrow y = \mathrm{f}$$

Für

$$x = 0 \ \rightarrow y = 0 \rightarrow \mathrm{B} = 0$$

Für

$$x = \frac{s}{2} \ \rightarrow f = \ A \sin\left(a \cdot \frac{s}{2}\right) \tag{21}$$

Außerdem ist

$$\frac{a\,s}{2} = \frac{\pi}{2} \tag{22}$$

der größte Wert der Sinusfunktion, da für y = f (die größte Knickung) steht. Daraus ergibt sich

$$a = \frac{\pi}{s}. \tag{23}$$

Für (21) folgt

$$f = \ A \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = A \cdot 1 = A. \tag{24}$$

$$y = \ f \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{\mathrm{s}}\right). \tag{25}$$

Aus der Geometrie ergibt sich

$$f^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 \quad | \, s = \frac{\pi}{a} \tag{26}$$

$$f^2 = \frac{\mathrm{l}^2}{4} - \frac{\pi^2}{4a^2} \quad | \, a^2 = \frac{F}{E \cdot I} \tag{27}$$

$$f^2 = \frac{\mathrm{l}^2}{4} - \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4F} \tag{28}$$

$$f^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{F \cdot l^2}\right) \tag{29}$$

Überlegung von Euler;

Wenn f existiert, dann ist der Stab bereits ausgeknickt. Wichtig aber ist der Grenzfall. Dafür gilt jedoch, dass f oder $f^2 = 0$ wird. Also muss eine Klammer Null werden, doch l ist auf keinen Fall Null. Also folgt

$$\left(1 - \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{F \cdot l^2}\right) = 0 \tag{30}$$

$$\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{F \cdot l^2} = 1. \tag{31}$$

Daraus ergibt sich

$$\pi^2 \cdot E \cdot I = F \cdot l^2 \quad | \, F = K. \tag{32}$$

$$K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} \quad | \; Eulersche\ Knickkraft. \tag{33}$$

$$I = \mathrm{A} \cdot i^2 \tag{34}$$

mit A = Querschnitt und i = Trägheitshalbmesser.

$$K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A \cdot i^2}{l^2}. \tag{35}$$

Daraus folgt die maximal zulässige Knickspannung

$$\sigma_K = \frac{K}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i^2}{l^2} \tag{36}$$

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}. \tag{37}$$

Die Größe (l / i) wird als Schlankheitsgrad λ bezeichnet.

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}. \tag{38}$$

Nach Euler unterscheidet man vier Knickfälle (Bild 2).

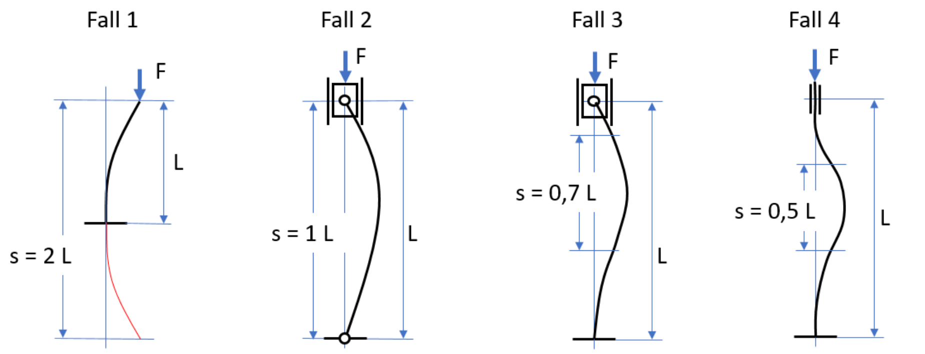

Bild 2. Rechnerische Knicklänge für vier Belastungsformen nach Euler

Aufgabe:

Ein Excel-Arbeitsblatt soll die zulässige Knickspannung für die vier Belastungsfälle bestimmen.