Beidseitig eingespannter Träger mit Streckenlast

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 06.12.2023

Überarbeitung:

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung:

Ableitung der Formel zur Ermittlung der Durchbiegung bei einem beidseitig fest eingespannten Träger mit gleichmäßig verteilter Streckenlast

Anwendungs-Datei: 06-05-12_DurchbiegungBETS.xlsx

Betrachtet wird ein beidseitig fest eingespannter Träger unter gleichmäßig verteilter Streckenlast. (Bild 1).

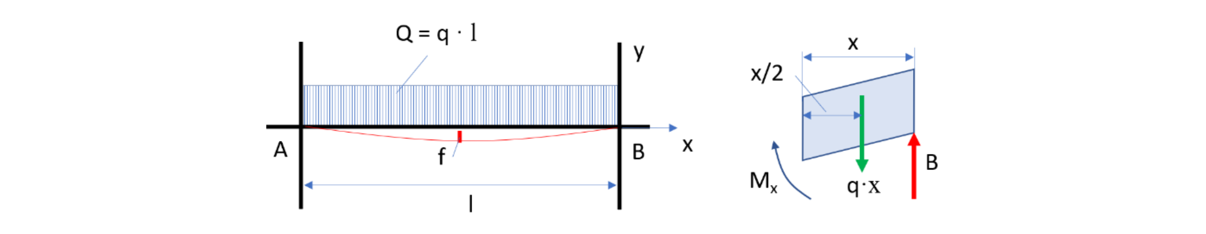

Bild 1. Belastungsfall

Randbedingungen:

Für x = 0 folgt y = 0 und y‘ = 0
Für x = l folgt y = 0 und y‘ = 0
Für x = l/2 folgt y‘ = 0.

M ist ein zusätzliches Moment, hervorgerufen durch die gegenüberliegende Einspannnung

$$\mathrm{M}_x = B \cdot x - \frac{q}{2}x^2 + M \tag{1}$$

und die Gleichung für die Durchbiegung folgt aus

$$y'' = k\left(B \cdot x - \frac{q}{2}x^2 + M\right) \quad | \quad -\frac{1}{E \cdot I} = k, \;\; B = \frac{Q}{2} = q\frac{l}{2} \tag{2}$$

$$y'' = k\left(\frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q}{2}x^2 + M\right) \tag{3}$$

$$y' = k\left(\frac{q \cdot l}{4} \cdot x^2 - \frac{q}{6}x^3 + M \cdot x + c_1\right). \tag{4}$$

Für x = 0 folgt y‘ = 0 und dadurch wird $c_1 = 0$.

$$y' = k\left(\frac{q \cdot l}{4} \cdot x^2 - \frac{q}{6}x^3 + M \cdot x\right). \tag{5}$$

Für x = l folgt y‘ = 0 und dadurch

$$0 = k\left(\frac{q}{4} \cdot l^3 - \frac{q}{6}l^3 + M \cdot l\right). \tag{6}$$

Daraus folgt

$$M \cdot l = -\frac{q}{4} \cdot l^3 + \frac{q}{6}l^3 = -\frac{q}{12}l^3. \tag{7}$$

Damit ist das zusätzliche Moment bestimmt. Aus (5) folgt

$$y' = k\left(\frac{q \cdot l}{4} \cdot x^2 - \frac{q}{6}x^3 - \frac{q \cdot l^3}{12} \cdot x\right) \tag{8}$$

$$y' = -\frac{q \cdot l^3}{12 \cdot E \cdot I}\left(3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \left(\frac{x}{l}\right)\right). \tag{9}$$

Es ergibt sich weiterhin

$$y = k\left(\frac{q \cdot l}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 - \frac{q \cdot l^2}{24}x^2\right) \tag{10}$$

$$y = -\frac{q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I}\left(2\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \left(\frac{x}{l}\right)^4 - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \tag{11}$$

Die größte Durchbiegung an der Stelle x = l/2 ergibt sich mit

$$y = -\frac{q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I}\left(\frac{2}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I}\left(\frac{4}{16} - \frac{1}{16} - \frac{4}{16}\right) \tag{12}$$

$$f = -\frac{q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I} \tag{13}$$