Einseitig frei aufliegender und anderseitig fest eingespannter Träger mit Streckenlast

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 06.12.2023

Überarbeitung:

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung:

Ableitung der Formel zur Ermittlung der Durchbiegung bei einem einseitig eingespannten und anderseitig frei aufliegenden Träger unter gleichmäßig verteilter Streckenlast.

Anwendungs-Datei: 06-05-10_DurchbiegungAETS.xlsx

Betrachtet wird ein einseitig eingespannter und anderseitig frei aufliegender Träger unter gleichmäßig verteilter Streckenlast. (Bild 1).

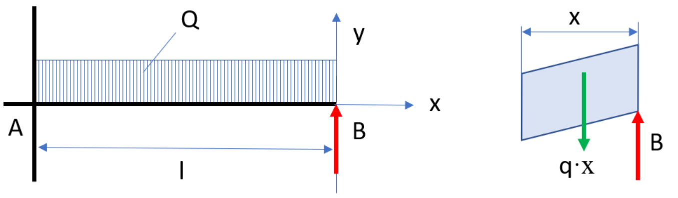

Bild 1. Belastungsfall

Ranbedingungen

$$\mathrm{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{y} = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{l} \quad \rightarrow \quad \mathrm{y} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{y}' = 0 \tag{2}$$

Für die Kräfte gilt

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{Q} \tag{3}$$

Das Biegemoment ergibt sich

$$\mathrm{Mb}_x = B \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} \tag{4}$$

und die Gleichung für die Durchbiegung folgt aus

$$y'' = -\frac{Mb_x}{E \cdot I} = -\frac{1}{E \cdot I}\left(B \cdot x - \frac{q}{2}x^2\right) \quad | \quad -\frac{1}{E \cdot I} = k \tag{5}$$

$$y' = k\left(B \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{q}{6}x^3 + c_1\right) \tag{6}$$

$$y = k\left(B \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{q}{24}x^4 + c_1 \cdot x + c_2\right) \tag{7}$$

Mit den Randbedingungen

$$0 = k\left(B \cdot \frac{l^2}{2} - \frac{q}{6}l^3 + c_1\right) \quad | \cdot l \tag{8}$$

$$0 = k\left(B \cdot \frac{l^3}{2} - \frac{q}{6}l^4 + c_1 \cdot l\right) \tag{9}$$

$$0 = k\left(B \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{q}{24}l^4 + c_1 \cdot l\right). \tag{10}$$

Mit (10) – (11) folgt

$$0 = B \cdot \frac{l^3}{2} - B \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{q}{6}l^4 + \frac{q}{24}l^4 \quad | \cdot 24 \tag{11}$$

$$0 = 12 \cdot B \cdot l^3 - 4 \cdot B \cdot l^3 - 4 \cdot q \cdot l^4 + q \cdot l^4 = 8 \cdot B \cdot l^3 - 3 \cdot q \cdot l^4 \tag{12}$$

$$8 \cdot B \cdot l^3 = 3 \cdot q \cdot l^4 \tag{13}$$

$$B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l \quad | \, q \cdot l = Q \tag{14}$$

$$B = \frac{3}{8} \cdot Q, \quad A = \frac{5}{8} \cdot Q \tag{15}$$

Eingesetzt in die erste Ableitung

$$0 = B\frac{l^2}{2} - \frac{q \cdot l^3}{6} + c_1 \tag{16}$$

$$0 = \frac{3}{16}q \cdot l^3 - \frac{1}{6}q \cdot l^3 + c_1 = \frac{q \cdot l^3}{48}(9 - 8) + c_1 \quad \rightarrow \quad c_1 = -\frac{q \cdot l^3}{48} \tag{17}$$

$$y = -\frac{1}{E \cdot I}\left(\frac{3}{8}q \cdot l \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{q}{24}x^4 - \frac{q \cdot l^3}{48}x\right) \tag{18}$$

$$y = -\frac{q \cdot l^4}{E \cdot I}\left(3\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \left(\frac{x}{l}\right)\right) \tag{19}$$

$$y = -\frac{Q \cdot l^3}{E \cdot I}\left(3\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \left(\frac{x}{l}\right)\right) \tag{20}$$

Die größte Durchbiegung ergibt sich aus dem Ansatz

$$y' = -\frac{1}{E \cdot I}\left(\frac{3}{16} q \cdot l \cdot x^2 - \frac{1}{6} q \cdot x^3 - \frac{1}{48} q \cdot l^3\right) \tag{21}$$

$$y' = -\frac{q}{48 \cdot E \cdot I}(9 \cdot l \cdot x^2 - 8 \cdot x^3 - l^3) = 0 \tag{22}$$

$$9 \cdot l \cdot x^2 - 8 \cdot x^3 - l^3 = 0 \tag{23}$$

$$9 \cdot l \cdot x^2 = 8 \cdot x^3 - l^3 \tag{24}$$

Für l = 1 ergeben sich grafisch drei Lösungen (Bild 2).

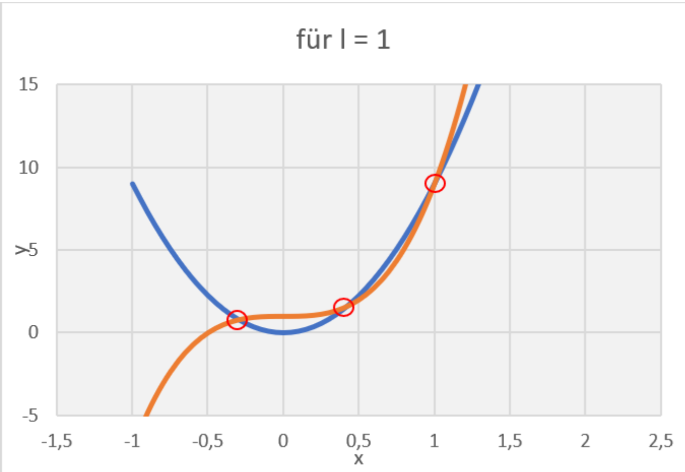

Bild 2. Grafische Lösung für l=1