Eingespannter Träger mit Punkt- und Streckenlast

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 06.12.2023

Überarbeitung:

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung:

Ableitung der Formel zur Ermittlung der Durchbiegung bei einem einseitig eingespannten Träger unter Punkt- und Streckenlast.

Anwendungs-Datei: 06-05-08_DurchbiegungETPS.xlsx

Betrachtet wird ein einseitig eingespannter Träger mit Punkt- und Streckenlast (Bild 1).

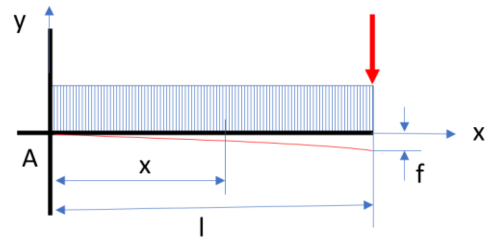

Bild 1. Belastungsfall

Das Biegemoment an der Stelle x bestimmt sich aus

$$Mb_x = \mathrm{F} \cdot (l - x) + q \cdot (l - x) \cdot \frac{(l-x)}{2} = \mathrm{F} \cdot (l - x) + \frac{q}{2}(\mathrm{l} - \mathrm{x})^2. \tag{1}$$

Die Durchbiegung eines Trägers an der Stelle x wird durch die folgende lineare Differentialgleichung beschrieben

$$\mathrm{y}'' = -\frac{Mb_x}{E \cdot I} = A\left(F(l - x) + q(l - x)\frac{(l-x)}{2}\right), \quad A == -\frac{1}{E \cdot I} \tag{2}$$

$$y'' = \mathrm{A}\left(F \cdot l - F \cdot x + \frac{q}{2}l^2 - q \cdot l \cdot x + \frac{q}{2}x^2\right). \tag{3}$$

Darin ist E das Elastizitätsmodul des Materials und I das Flächenträgheitsmoment des Querschnitts. Die Summe der Einzeldurchbiegungen, hervorgerufen durch die einzelnen Lasten, ist gleich der Gesamtdurchbiegung. Die erste Ableitung ist

$$y' = \mathrm{A}\left(F \cdot l \cdot x - \frac{F}{2} \cdot x^2 + \frac{q}{2}l^2 x - \frac{q}{2} \cdot l \cdot x^2 + \frac{q}{6}x^3 + c_1\right) \tag{4}$$

und die Gleichung für die Durchbiegung lautet

$$y = \mathrm{A}\left(\frac{F}{2}lx^2 - \frac{F}{6}x^3 + \frac{q}{4}l^2x^2 - \frac{q}{6}lx^3 + \frac{q}{24}x^4 + c_1 \cdot \mathrm{x} + c_2\right). \tag{5}$$

Für $x = 0$ ist $y = 0$ und auch $y' = 0$, so dass sich daraus $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$ ergibt.

$$y = \mathrm{A}\left(\frac{Fl^3}{6}\left(3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right) + \frac{ql^4}{24}\left(6\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right)\right). \tag{6}$$

Allgemein gilt für die Durchbiegung

$$y = -\frac{\mathrm{l}^3}{24 \cdot E \cdot I}\left(4F\left(3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right) + \mathrm{Q}\left(6\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right)\right). \tag{7}$$

Für $x = l$ ergibt sich die größte Durchbiegung

$$f = -\frac{l^3}{24 \cdot E \cdot I}(8F + 3Q). \tag{8}$$