Eingespannter Träger mit Streckenlast

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 06.12.2023

Überarbeitung:

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung:

Ableitung der Formel zur Ermittlung der Durchbiegung bei einem einseitig eingespannten Träger unter Streckenlast.

Anwendungs-Datei: 06-05-07_DurchbiegungETS.xlsx

Betrachtet wird ein einseitig eingespannter Träger mit Streckenlast (Bild 1).

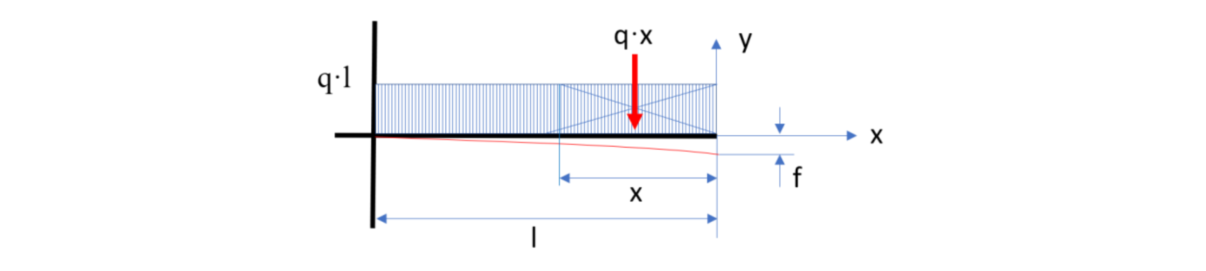

Bild 1. Belastungsfall

Das Biegemoment an der Stelle x bestimmt sich aus

$$Mb_x = q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q}{2} x^2. \tag{1}$$

Die Durchbiegung eines Trägers an der Stelle x wird durch die folgende lineare Differentialgleichung beschrieben

$$y'' = -\frac{Mb_x}{E \cdot I} = -\frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot x^2. \tag{2}$$

Darin ist E das Elastizitätsmodul des Materials und I das Flächenträgheitsmoment des Querschnitts. Die erste Ableitung ist

$$y' = -\frac{q}{6 \cdot E \cdot I} x^3 + c_1 = -\frac{q}{6 \cdot E \cdot I}(x^3 + c_1^*) \tag{3}$$

und die Gleichung für die Durchbiegung lautet

$$y = -\frac{q}{24 \cdot E \cdot I} x^4 + c_1 \cdot \mathrm{x} + c_2 = -\frac{q}{24 \cdot E \cdot I}(x^4 + \mathrm{c}_1^* \cdot x + c_2^*). \tag{4}$$

Für x = l ist y = 0 und auch y‘ = 0, so dass sich daraus ergibt

$$0 = -\frac{q}{6 \cdot E \cdot I}(l^3 + c_1^*). \tag{5}$$

Für die Konstante

$$c_1^* = -l^3. \tag{6}$$

Damit ist

$$y = -\frac{q}{24 \cdot E \cdot I}(x^4 - \mathrm{l}^3 \cdot x + c_2^*). \tag{7}$$

Daraus folgt, wenn l eingesetzt

$$\mathrm{c}_2^* = 0. \tag{8}$$

Allgemein gilt für die Durchbiegung

$$y = -\frac{\mathrm{q}}{24 \cdot E \cdot I}(\mathrm{x}^4 - \mathrm{x} \cdot l^3) \tag{9}$$

Für x = 0 ergibt sich die größte Durchbiegung

$$f = -\frac{\mathrm{q} \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}. \tag{10}$$

Für den Fall, dass der Koordinatennullpunkt in A liegt (Bild 2), ergibt sich

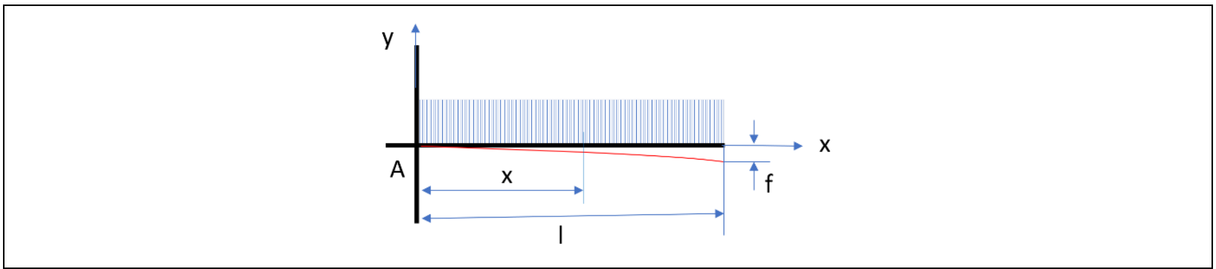

Bild 2. Koordinatennullpunkt in A

$$Mb_x = q(l-x)\frac{l-x}{2} \tag{11}$$

$$Mb_x = \frac{q}{2}(l^2 - 2 \cdot l \cdot x + x^2) \tag{12}$$

$$y'' = -\frac{Mb_x}{E \cdot I} = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I}(l^2 - 2 \cdot l \cdot x + x^2) \tag{13}$$

$$\mathrm{y}' = -\frac{q}{2 \cdot E \cdot I}\left(l^2 \cdot x - l \cdot x^2 + \frac{x^3}{3} + c_1\right) \tag{14}$$

$$\mathrm{y} = -\frac{q}{2 \cdot E \cdot I}\left(\frac{l^2}{2} \cdot x^2 - \frac{l}{3}x^3 + \frac{x^4}{12} + c_1 \cdot x + c_2\right) \tag{15}$$

Für x = 0 folgt y = 0 und y‘ = 0 und damit $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$. Also gilt

$$y = -\frac{q}{2 \cdot E \cdot I}\left(\frac{l^2}{2} \cdot x^2 - \frac{l}{3}x^3 + \frac{x^4}{12}\right) \tag{16}$$

$$y = -\frac{q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I}\left(6\left(\frac{x}{\mathrm{l}}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{\mathrm{l}}\right)^3 + \left(\frac{x}{\mathrm{l}}\right)^4\right). \tag{17}$$

$$y = -\frac{Q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}\left(6\left(\frac{x}{\mathrm{l}}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{\mathrm{l}}\right)^3 + \left(\frac{x}{\mathrm{l}}\right)^4\right). \tag{18}$$

Für den Fall x = l ergibt sich wiederum die größte Durchbiegung mit

$$f = -\frac{\mathrm{Q} \cdot l^3}{8 \cdot E \cdot I}. \tag{19}$$