Eingespannter Träger mit Punktlast

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 06.12.2023

Überarbeitung:

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung:

Ableitung der Formel zur Ermittlung der Durchbiegung bei einem einseitig eingespannten Träger unter Punktlast.

Anwendungs-Datei: 06-05-06_DurchbiegungETP.xlsx

Betrachtet wird ein einseitig eingespannter Träger mit Punktlast (Bild 1).

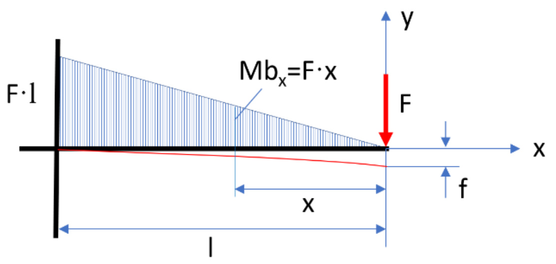

Bild 1. Belastungsfall

Die Durchbiegung eines Trägers an der Stelle x wird durch die folgende lineare Differentialgleichung beschrieben

$$y'' = -\frac{Mb_x}{E \cdot I} = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot x \quad | \; a = \frac{F}{E \cdot I}. \tag{1}$$

Darin ist E das Elastizitätsmodul des Materials und I das Flächenträgheitsmoment des Querschnitts. Die vereinfachte Formel lautet

$$y'' = a \cdot x \tag{2}$$

Die erste Ableitung ist

$$y' = a \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \tag{3}$$

und die Gleichung für die Durchbiegung lautet

$$y = a \cdot \frac{x^3}{6} + c_1 \cdot x + c_2. \tag{4}$$

Für x = l ist y = 0 und auch y‘ = 0, so dass sich daraus ergibt

$$y' = a \cdot \frac{l^2}{2} + c_1. \tag{5}$$

Daraus folgt die Konstante c_1

$$c_1 = -\frac{a}{2} l^2. \tag{6}$$

Außerdem ist

$$y = \frac{a}{6} l^3 - \frac{a}{2} l^3 + c_1. \tag{7}$$

Daraus folgt

$$c_2 = \frac{a}{3} l^3 \tag{8}$$

Allgemein gilt für die Durchbiegung

$$y = \frac{a}{6} x^3 - \frac{a}{2} l^2 x + \frac{a}{3} l^3 \tag{9}$$

$$y = \mathrm{a}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2}{2} x + \frac{l^3}{3}\right) \tag{10}$$

$$y = \frac{\mathrm{a} \cdot l^3}{6}\left(\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right) + 2\right) \tag{11}$$

$$y = -\frac{\mathrm{F} \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I}\left(\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right) + 2\right) \tag{12}$$

Für x = 0 ergibt sich die größte Durchbiegung

$$f = -\frac{\mathrm{F} \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}. \tag{13}$$

Für den Fall, dass der Koordinatennullpunkt in A liegt (Bild 2), ergibt sich

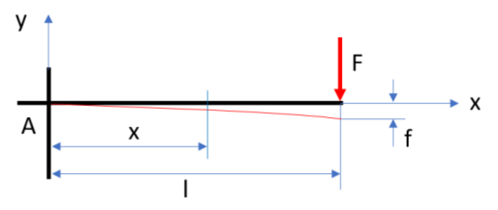

Bild 2. Koordinatennullpunkt in A

$$y'' = -\frac{Mb_x}{E \cdot I} = -\frac{F}{E \cdot I}(l - x) \tag{14}$$

$$y' = -\frac{F}{E \cdot I}\left(l \cdot x - \frac{x^2}{2} + c_1\right) \tag{15}$$

$$y = -\frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{l}{2} \cdot x^2 - \frac{x^3}{6} + c_1 \cdot x + c_2\right) \tag{16}$$

Für x = 0 folgt y = 0 und y‘ = 0 und damit $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$. Also gilt

$$y = -\frac{F \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I}\left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}\right) \tag{17}$$

$$y = -\frac{F \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I}\left(3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right). \tag{18}$$

Für den Fall x = l ergibt sich wiederum das größte Biegemoment mit

$$f = -\frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}. \tag{19}$$

Für den Fall, dass die Punktlast in der Mitte des Trägers angreift (Bild 3), ergibt sich die größte Durchbiegung

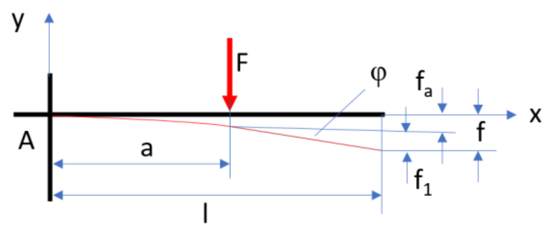

Bild 3. Mittig angreifende Punktlast

$$\tan\varphi = y' = \frac{f_1}{l - a} \tag{4}$$

$$f = -\left(f_a + y'(l - a)\right). \tag{5}$$