Flächenträgheitsmomente

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 06.12.2023

Überarbeitung:

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung:

Das Flächenträgheitsmoment ist eine in der Festigkeitslehre verwendete geometrische Größe, die sich auf den Querschnitt eines Trägers bezieht. Es wird auch als Flächenmoment zweiten Grades bezeichnet. Es erfolgt die Ableitung des Steinerschen Verschiebungssatzes.

Anwendungs-Datei:

Das Flächenträgheitsmoment beschreibt den Widerstand eines Bauteils gegenüber einer Beanspruchung auf Torsion oder Biegung (Bild 1).

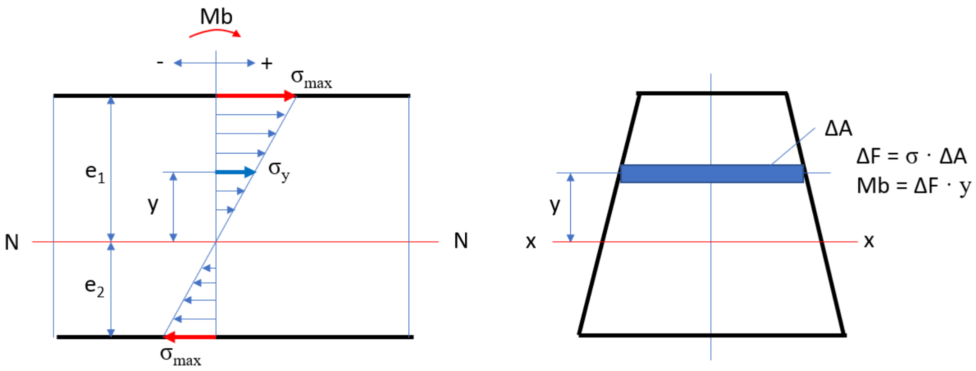

Bild 1. Biegebeanspruchung

Die Summe der durch Biegespannung verursachten Kräfte muss Null sein, da es sich um ein statisches System handelt. Daraus ergibt sich

$$\sum \Delta F = 0 = \sum \sigma \cdot \Delta A = c \sum y \cdot \Delta A \tag{1}$$

Die Variable c steht als Größe für den Wert σ_{max} / e_1 und ist für die Betrachtung uninteressant. Interessanter ist die Größe $\Sigma y \cdot \Delta A$. Dieser Wert wurde bereits bei der Ermittlung der Schwerpunktachse erörtert (Bild 2).

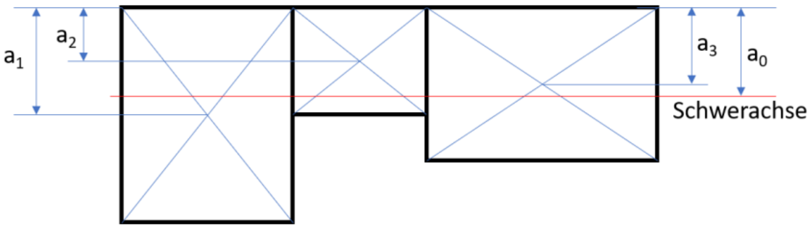

Bild 2. Schwerachse zusammengesetzter Rechtecke

$$\mathrm{A} \cdot a_0 = \mathrm{A}_1 \cdot a_1 + \mathrm{A}_2 \cdot a_2 + \mathrm{A}_3 \cdot a_3 \tag{2}$$

$$a_0 = \frac{\mathrm{A}_1 \cdot a_1 + \mathrm{A}_2 \cdot a_2 + \mathrm{A}_3 \cdot a_3}{A}. \tag{3}$$

Die neutrale Faser ist identisch mit der Schwerachse des Profils, welche biegebeansprucht ist. Daraus ergibt sich für die Bestimmung des Trägheitsmoments (Bild 3)

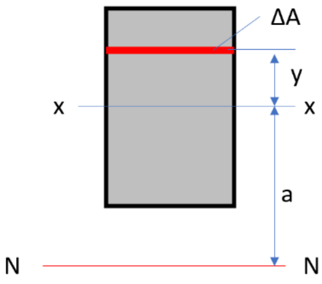

Bild 3. Abstand eines Flächenelements zur neutralen Faser

Ist die Fläche A mit der Schwerachse x – x innerhalb eines ganzen Systems mit der neutralen Faser N – N, so errechnet sich ihr Trägheitsmoment aus der Summe der Flächenintervalle multipliziert mit dem Abstand zur neutralen Faser zum Quadrat. Also

$$I_N = \sum \Delta A \cdot (a + y)^2 \tag{4}$$

$$I_N = \sum \Delta A \cdot (a^2 + 2ay + y^2). \tag{5}$$

Die Variable a lässt sich als konstante Größe vor das Summenzeichen setzen

$$I_N = a^2 \sum \Delta A \cdot +2a \sum y \cdot \Delta A + y^2 \cdot \Delta A \quad (6)$$

Es folgt $\Sigma\, \Delta A = A$ und der Ausdruck

$$2a \sum y \cdot \Delta A = 0. \quad (7)$$

Das letzte Glied entspricht dem Trägheitsmoment für die Schwerachse x – x. Es ergibt sich

$$I_N = a^2 \cdot A + 0 + I_x \quad (8)$$

$$I_N = I_x + A \cdot a^2 \quad (9)$$

Dies ist der Steinersche Verschiebungssatz.

Aufgabe

Es soll eine Klasse Rechteck erstellt werden, in der auch die Position im Koordinatensystem verwaltet wird. Eine Methode soll das Flächenträgheitsmoment aller instanziierten Objekte nach dem Steinerschen Verschiebungssatz bestimmen.