Querschnittsänderung bei Dehnung

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 06.12.2023

Überarbeitung:

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung:

Das Bauelement behält keinen konstanten Querschnitt bei Dehnung. Die hier aufgeführten Formeln und Beispiele dienen als Arbeitsgrundlage für eine Umsetzung mit Excel.

Anwendungs-Datei:

1 Grundlage

Ein fest eingespannter Stab änder bei Dehnung seinen Querschnitt (Bild 1).

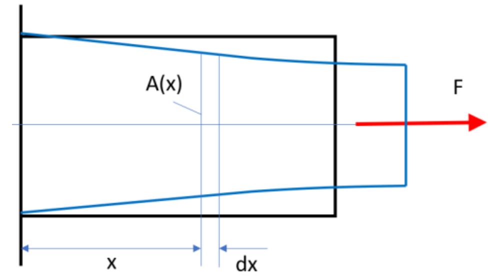

Bild 1. Stab unter Dehnung

Die Dehnung bestimmt sich aus der Summe der Dehnung der infinitesimalen Elemente

$$\Delta l = \int_0^l \epsilon \cdot dx \quad | \, \varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \tag{1}$$

Es folgt

$$\Delta l = \frac{1}{\epsilon} \int_0^l \sigma \cdot dx \quad | \, \sigma = \frac{F}{A} \tag{2}$$

$$\Delta l = \frac{F}{E} \int_0^l \frac{1}{A(x)} \cdot dx. \tag{3}$$

2 Anwendungsbeispiel

Es ist die Längenzunahme eines mit F belasteten stumpfen Kreiskegels zu bestimmen, wenn R und r die Radien der Endquerschnitte sind (Bild 2).

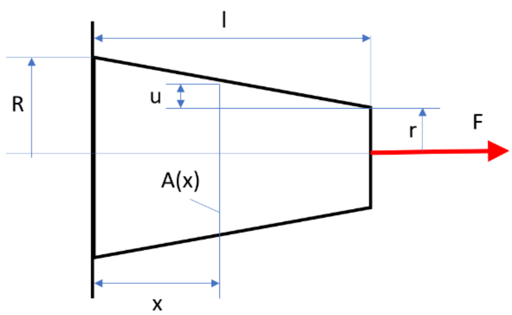

Bild 2. Kegelstumpf unter Dehnung

$$A(x) = \pi \cdot r(x)^2 = \pi \cdot (r + u)^2. \tag{4}$$

Aus den Proportionen folgt

$$\frac{R-r}{l} = \frac{u}{l-x}. \tag{5}$$

Umgestellt

$$u = \frac{(R-r)(l-x)}{l} \tag{6}$$

Eingesetzt

$$A(x) = \pi \cdot \left(\mathrm{r} + \frac{(R-r)(l-x)}{l}\right)^2. \tag{7}$$

Ausgewertet

$$A(x) = \pi r^2 + 2\pi r \frac{(R-r)(l-x)}{l} + \pi \frac{(R-r)^2(l-x)^2}{l^2} \tag{8}$$

$$A(x) = \frac{\pi}{l^2}\left(r^2 l^2 + 2rl(R-r)(l-x) + (R-r)^2(l-x)^2\right) \quad (9)$$

$$A(x) = \frac{\pi}{l^2}\left(rl + (R-r)(l-x)\right)^2 \quad (10)$$

$$A(x) = \frac{\pi}{l^2}\left(rl + \mathrm{Rl} - \mathrm{rl} - \mathrm{x}(R-r)\right)^2 \quad (11)$$

Dieser Weg führt nicht weiter zur Lösung! Der folgende Ansatz führt schnell zum Ziel (Bild 3).

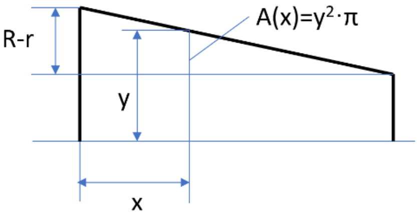

Bild 3. Proportionen am Kegelstumpf

$$\frac{R-r}{l} = \frac{R-y}{x} \quad (12)$$

Umgestellt

$$y = R - \frac{R-r}{l}x. \quad (13)$$

Daraus folgt die Ableitung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{R-r}{l}dx. \quad (14)$$

Eingesetzt und ausgerechnet

$$\Delta l = \frac{F}{E}\int \frac{1}{A(x)}dx \quad (15)$$

$$\Delta l = \frac{F}{E} - \int_{x=0,y=R}^{x=l,y=r} \frac{-\frac{l}{R-r}}{y^2\pi}dy \quad (16)$$

$$\Delta l = \frac{F}{E\cdot\pi} \cdot \frac{l}{R-r}\int_r^R \frac{dy}{y^2} \quad (17)$$

$$\Delta l = \frac{F}{E\cdot\pi} \cdot \frac{l}{R-r}\left|-\frac{1}{y}\right|_r^R = \frac{F\cdot l}{E\cdot\pi(R-r)}\left(-\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right) \quad (18)$$

$$\Delta l = \frac{F\cdot l}{E\cdot\pi(R-r)}\left(-\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{(R-r)}{R\cdot r} \quad (19)$$

Es folgt die endgültige Formel zur Längenzunahme

$$\Delta l = \frac{F\cdot l}{E\cdot\pi\cdot R\cdot r} \quad (20)$$