Formänderungsarbeit

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 06.12.2023

Überarbeitung:

Die Formänderungsarbeit W beschreibt die geleistete Arbeit zur Verformung eines elastischen Ssytems. Die hier aufgeführten Formeln und Beispiele dienen als Arbeitsgrundlage für eine Umsetzung mit Excel.

Anwendungs-Datei:

Bei der elastischen Verformung eines Körpers oder dem Spannen einer Feder muss eine Kraft aufgewandt werden. Diese verrichtet eine wegabhängige Arbeit.

1 Formänderungsarbeit bei Normalspannung

Wir betrachten ein Massenelement dx, dass durch eine Normalspannung in Richtung dx verformt wird (Bild 1).

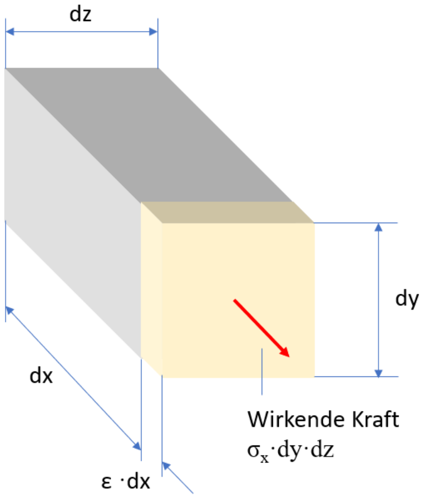

Bild 1. Formänderung unter Normalspannung

Die Federarbeit ergibt sich aus

$$dW = \sigma_x \cdot dz \cdot dy \cdot \epsilon_x \cdot dx \cdot \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Mit

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \tag{2}$$

und

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \tag{3}$$

folgt

$$dW = \frac{\sigma_x}{2} \cdot dV \cdot \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot {\sigma_x}^2 \cdot \mathrm{dV} \tag{4}$$

Für die gesamte Federarbeit folgt

$$W = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \int {\sigma_x}^2 \cdot \mathrm{dV}. \tag{5}$$

Wenn σ_x = konst., gilt

$$W = \frac{\sigma_x^2}{2 \cdot E} \cdot V \tag{6}$$

2 Formänderungsarbeit bei Tangentialspannung

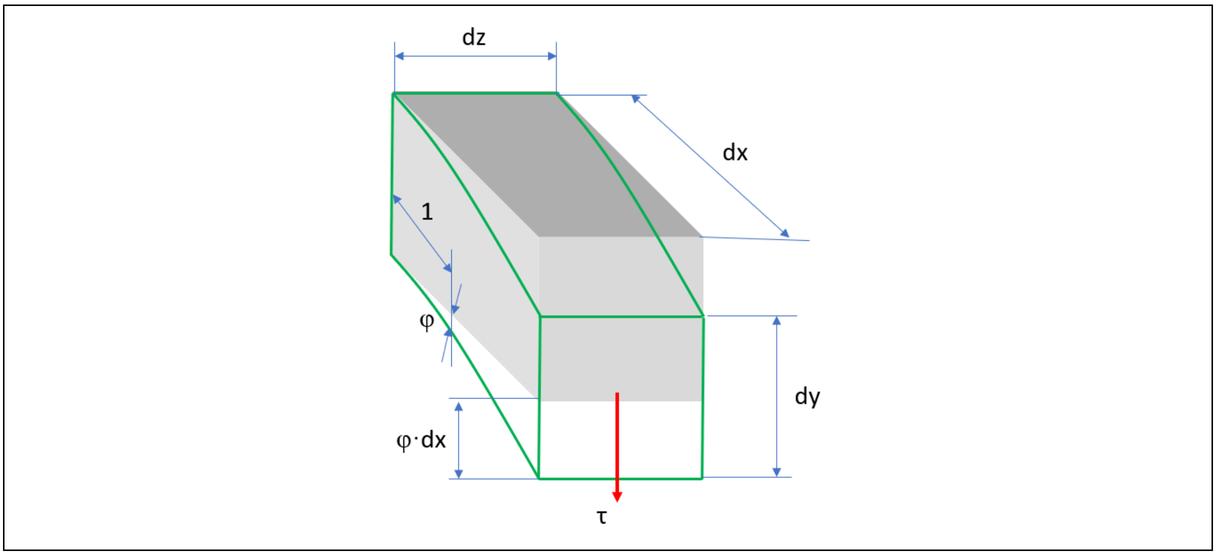

Bild 2. Formänderung unter Tangentialspannung

Der Ansatz zur Federarbeit ist in diesem Fall

$$dW = \tau \cdot dz \cdot dy \cdot \varphi \cdot dx \cdot \frac{1}{2} \tag{7}$$

$$dW = \frac{\tau^2}{2 \cdot G} \cdot dV \tag{8}$$

Für den Gleitmodul G gilt auch die Beziehung

$$\varphi = \frac{\tau}{G}. \tag{9}$$

3 Spezielle Formänderungsarbeit

3.1 Formänderungsarbeit bei Biegespannung (Normalspannung)

Wir betrachten den Biegequerschnitt mit dem axialen Flächenträgheitsmoment I (Bild 3).

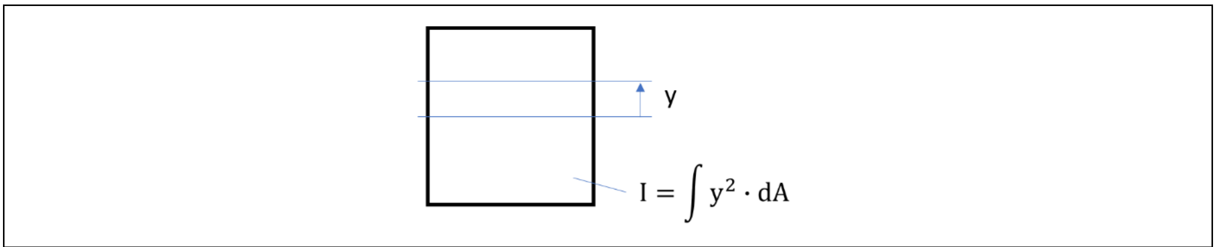

Bild 3. Biegequerschnitt

Die Biegespannung im Abstand y von der neutralen Phase bestimmt sich aus

$$\sigma = \frac{Mb}{W} = \frac{Mb}{I} \cdot y. \tag{10}$$

Durch Einsetzen folgt

$$dW = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \frac{Mb^2}{I^2} y^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad | \, dy \cdot dz = dA \tag{11}$$

$$dW = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \frac{Mb^2}{I^2} y^2 \cdot dA \cdot dx \tag{12}$$

$$dW = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \frac{Mb^2}{I^2} \int y^2 \cdot dA \cdot dx \quad | \, I = \int y^2 \cdot dA \tag{13}$$

$$dW = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \frac{Mb^2}{Ip} dx \tag{14}$$

3.2 Formänderungsarbeit bei Torsionsspannung (Tangentialspannung)

Mit dem polaren Flächenträgheitsmoment Ip und dem Verdrehwinkel φ bestimmt sich die Torsionsspannung unter dem Torsionsmoment Mt

$$\tau = \frac{Mt}{Ip} \cdot \varphi. \tag{15}$$

Für die Formänderungsarbeit folgt

$$dW = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \frac{Mt^2}{Ip^2} \cdot \varphi^2 \cdot dz \cdot dy \cdot dx \quad | \, dz \cdot dy = dA \tag{16}$$

$$dW = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \frac{Mt^2}{Ip^2} \cdot \varphi^2 \cdot dA \cdot dx \tag{16}$$

$$dW = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \frac{Mt^2}{Ip} \cdot dx \tag{16}$$

3.3 Anwendungsbeispiele

3.3.1 Einseitig eingespannter Träger unter Punktlast

An einem einseitig eingespannten Träger wirkt am Ende eine Punktlast (Bild 4).

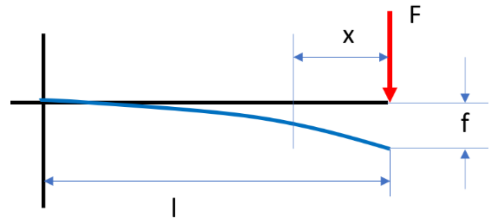

Bild 4. Einseitig eingespannter Träger unter Punktlast

Anwendung der Formel

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{Mb^2}{E \cdot I} dx \quad | \, Mb = F \cdot x \tag{17}$$

$$dW = \frac{1}{2 \cdot \mathrm{E} \cdot \mathrm{I}} \cdot F^2 \cdot x^2 \cdot dx \tag{18}$$

$$W = \int dW = \frac{1}{2 \cdot \mathrm{E} \cdot \mathrm{I}} \cdot F^2 \cdot \int_0^l x^2 \cdot dx \tag{19}$$

$$W = \frac{F^2}{2 \cdot E \cdot I} |x^3|_0^l = \frac{F^2 \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} \tag{20}$$

Da aber der Träger durch die Karft F an der Stelle l den Weg f zurücklegt, kann man setzen

$$\frac{F^2 \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} = \frac{F \cdot f}{2}. \tag{21}$$

Es ergibt sich die maximale Durchbiegung aus

$$f = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}. \tag{22}$$

Unter diesem Weg ist also f nur unter der Punktlast bestimmbar.

3.3.2 Frei aufliegender Träger unter unsymmetrisch angreifender Punktlast

Der Träger (Bild 5) wird getrennt an der Stelle der Punktlast betrachtet. Aus der Gleichgewichtsbetrachtung folgt dann

$$W = W_1 + W_2 = \frac{F \cdot f}{2}. \tag{23}$$

Für die Formänderungsarbeit folgt

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{Mb^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot dx \tag{24}$$

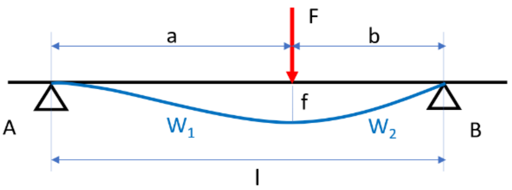

Bild 5. Beidseitig aufliegender Träger unter Punktlast

Die Auflagerkräfte bestimmen sich aus

$$A = F \cdot \frac{b}{l} ; B = F \cdot \frac{a}{l} \tag{25}$$

Die einzelnen Formänderungsarbeiten sind

$$W_1 = \frac{A^2}{2 \cdot E \cdot I} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^a = \frac{F^2 \cdot b^2 \cdot a^3}{6 \cdot E \cdot I \cdot l^2} \tag{26}$$

$$W_2 = \frac{B^2}{2 \cdot E \cdot I} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^a = \frac{F^2 \cdot a^2 \cdot b^3}{6 \cdot E \cdot I \cdot l^2} \tag{27}$$

Die Durchbiegung unter der Last ergibt sich aus dem Ansatz

$$\frac{F \cdot f}{2} = \frac{F^2 \cdot a^2 \cdot b^2}{6 \cdot E \cdot I \cdot l^2}(a + b) \quad | \, a + b = l \tag{28}$$

$$f = F \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot l} \tag{29}$$

3.3.3 Federkonstanten einer gewickelten zylindrischen Feder

Für eine zylindriche Feder (gewickelte Schraubenfeder) von gleichem Drahtdurchmesser (Bild 6), ist die Federkonstante c zu bestimmen.

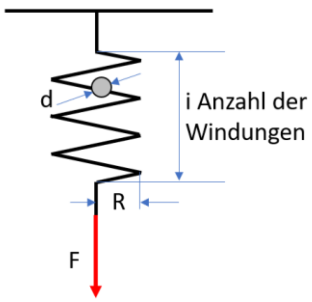

Bild 6. Zylindrisch gewickelte Feder

Die Formänderungsarbeit folgt aus dem Ansatz

$$dW = \frac{Mt^2}{2 \cdot G \cdot Ip} \cdot dx. \tag{30}$$

Darin ist

$$Mt = F \cdot R \tag{31}$$

in diesem Fall konstant und der Weg ist

$$s = 2 \cdot R \cdot \pi \cdot i. \tag{32}$$

Es folgt die Formänderungsarbeit

$$W = \frac{F^2 \cdot R^2}{2 \cdot G \cdot Ip} \cdot 2 \cdot R \cdot \pi \cdot i. \tag{33}$$

Sie entspricht der Durchbiegungsarbeit

$$W = \frac{F \cdot f}{2}, \tag{34}$$

sodass durch Gleichsetzung folgt

$$\frac{F^2 \cdot R^2}{2 \cdot G \cdot Ip} \cdot 2 \cdot R \cdot \pi \cdot i = \frac{F \cdot f}{2}. \tag{35}$$

Durch Umstellung folgt die Durchbiegung

$$f = \frac{2 \cdot F \cdot R^2 \cdot \pi \cdot i}{G \cdot Ip}. \tag{36}$$

Für die Federkonstante c besteht die Beziehung

$$c = \frac{F}{f} = \frac{G \cdot Ip}{2 \cdot F \cdot R^2 \cdot \pi \cdot i} \quad | \; Ip = \frac{d^4 \pi}{32}. \tag{37}$$

Durch Einsetzen folgt die Formel zur Bestimmung der Federkonstanten

$$c = \frac{G \cdot d^4}{64 \cdot R^3 \cdot i}. \tag{38}$$

3.3.4 Federkonstante einer gewickelten konischen Feder

Für eine konische Feder (gewickelte Schraubenfeder) von gleichem Drahtdurchmesser (Bild 7), ist die Federkonstante c zu bestimmen. Zu beachten ist, dass Mt veränderlich ist!

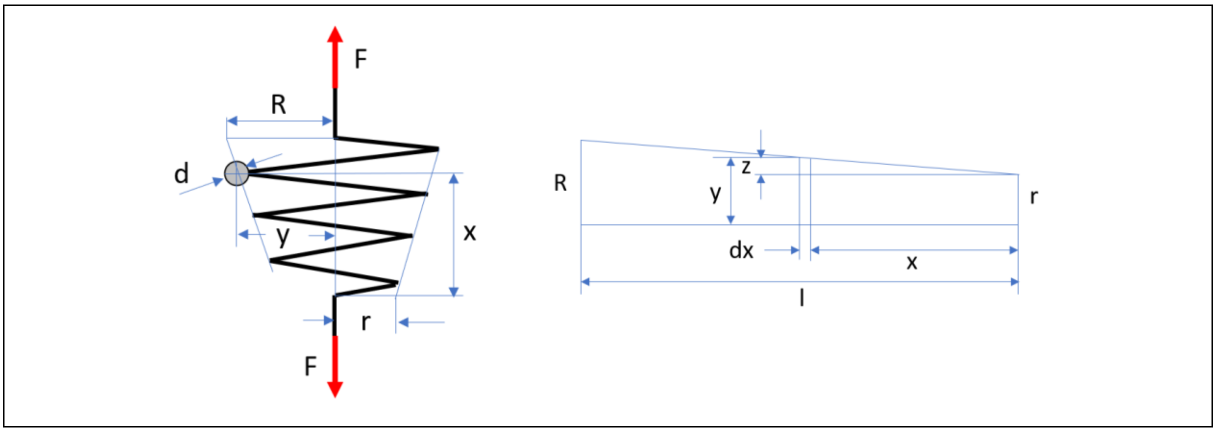

Bild 7. Konisch gewickelte Feder

$$dx = y \cdot d\varphi; y = r + z. \tag{39}$$

Aus den Proportionen ergibt sich

$$\frac{l}{R-r} = \frac{x}{z}; \frac{R-r}{i \cdot 2 \cdot \pi} = \frac{z}{\varphi} \tag{40}$$

oder

$$\frac{l}{i \cdot 2 \cdot \pi} = \frac{x}{\pi}; \frac{R-r}{i \cdot 2 \cdot \pi} = \frac{y-r}{\varphi}. \tag{41}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$y = r + \varphi \cdot \frac{R-r}{i \cdot 2 \cdot \pi}. \tag{42}$$

Die Gleichung für die Formänderungsarbeit lautet

$$W = \frac{Mt(x)^2}{2 \cdot G \cdot Ip} \int dx \tag{43}$$

Die Größe l als Integrationsgrenze ist noch unbekannt.

$$\int_0^l dx = \int_{\varphi=0}^{\varphi=i2\pi} \left(r + \varphi \frac{R-r}{i \cdot 2 \cdot \pi}\right) d\varphi \tag{44}$$

$$l = \left| r \cdot \varphi + \frac{\varphi^2}{2} \cdot \frac{R-r}{i \cdot 2 \cdot \pi} \right|_0^{i2\pi} \tag{45}$$

$$l = r \cdot i \cdot 2 \cdot \pi + \frac{(i \cdot 2 \cdot \pi)^2 \cdot (R-r)}{2 \cdot 2 \cdot i \cdot 2 \cdot \pi} \tag{46}$$

$$l = i \cdot \pi \cdot (R + r). \tag{47}$$

Für die Formänderungsarbeit folgt

$$W = \frac{Mt(x)^2}{2 \cdot G \cdot Ip} \int_0^{i\pi(R+r)} dx \quad (48)$$

$$W = \frac{F^2 \cdot y^2}{2 \cdot G \cdot Ip} \int_0^{i\pi(R+r)} dx. \quad (48)$$

Da

$$dx = y \cdot d\varphi \tag{49}$$

ist, ergibt sich auch

$$W = \frac{F^2}{2 \cdot G \cdot Ip} \int_0^{i2\pi} y^2 \cdot dx. \tag{50}$$

$$y = r + \varphi \frac{R-r}{i \cdot 2 \cdot \pi}; \; \frac{R-r}{i \cdot 2 \cdot \pi} = a \tag{51}$$

$$y^3 = (r + \varphi \cdot a)^3 = r^3 + 3r^2 a\varphi + 3ra^2\varphi^2 + a^3\varphi^3 \tag{52}$$

Und wenn für

$$\frac{F^2}{2 \cdot G \cdot Ip} = A \tag{53}$$

gesetzt wird, dann ergibt sich für die Formänderungsarbeit

$$W = A \int_0^{i2\pi} (r^3 + 3r^2 a\varphi + 3ra^2\varphi^2 + a^3\varphi^3) \tag{54}$$

$$W = A \left| r^3\varphi + \frac{3}{2} r^2 a\varphi^2 + ra^2\varphi^3 + \frac{1}{4} a^3\varphi^4 \right|_0^{i2\pi} \tag{55}$$

$$W = A \cdot \left(r^3 i2\pi + \frac{3}{2} r^2 a i^2 4\pi^2 + ra^3 i^3 8\pi^3 + \frac{1}{4} a^3 i^4 16\pi^4 \right); a = \frac{R-r}{i \cdot 2 \cdot \pi} \tag{56}$$

$$W = A \cdot i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(r^3 + \frac{3}{2} r^2 (R-r) + r(R-r)^2 + \frac{1}{4} (R-r)^3 \right) \tag{57}$$

$$W = A \cdot i \cdot 2 \cdot \pi \left(r^3 - \frac{3}{2} r^3 + \frac{3}{2} Rr^2 + R^2 r - 2Rr^2 + r^3 + \frac{1}{4} R^3 - \frac{3}{4} R^2 r + \frac{3}{4} Rr^2 - \frac{1}{4} r^3 \right) \tag{58}$$

$$W = A \cdot i \cdot 2 \cdot \pi \left(\frac{1}{4} r^3 + \frac{1}{4} Rr^2 + \frac{1}{4} R^2 r + \frac{1}{4} R^3 \right) \tag{59}$$

$$W = A \cdot i \cdot \frac{\pi}{2} (r^3 + Rr^2 + R^2 r + R^3) \tag{60}$$

$$W = A \cdot i \cdot \frac{\pi}{2} (R + r)(R^2 + r^2). \tag{61}$$

Diese Formänderungsarbeit entspricht der geleisteten Federarbeit

$$\frac{F \cdot f}{2} = \frac{F^2}{2 \cdot G \cdot Ip} \cdot \frac{i \cdot \pi}{2} \cdot (R + r)(R^2 + r^2) \tag{62}$$

Damit ergibt sich für die Federkonstante

$$c = \frac{F}{f} = \frac{2 \cdot G \cdot Ip}{i \cdot \pi \cdot (R+r)(R^2+r^2)}. \tag{63}$$

.3.5 Zwei gelenkig aufgehängte und gelenkig miteinander verbundene Stäbe

Zwei Stäbe sind gelenkig aufgehängt und gelenkig miteinander verbunden (Bild 8). Im Verbindungsgelenk ist die Kraft F wirksam. Es ist die Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft F in Richtung der Kraft zu ermitteln.

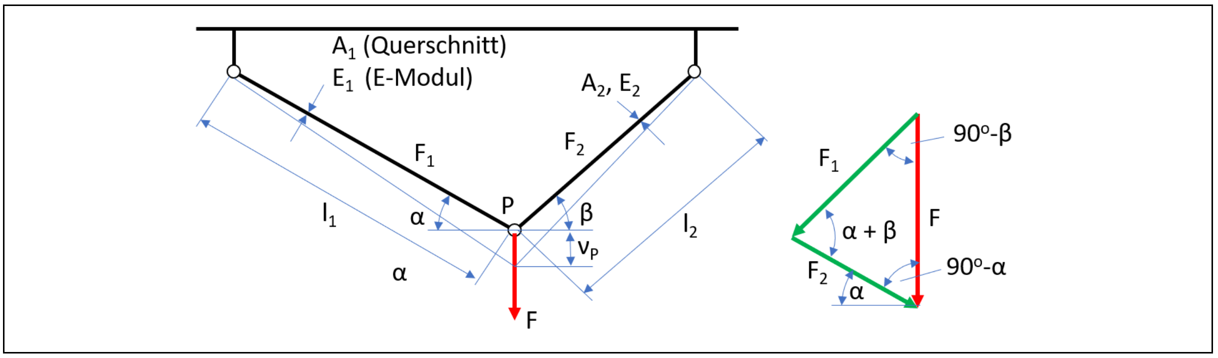

Bild 8. Stabverbindung

Nach dem Sinussatz ergibt sich

$$\frac{F}{sin(\alpha+\beta)} = \frac{F_1}{sin(90^o-\beta)} = \frac{F_2}{sin(90^o-\alpha)} \tag{64}$$

Daraus folgt

$$F_1 = F\frac{\cos\beta}{sin(\alpha+\beta)};\; F_2 = F\frac{\cos\alpha}{sin(\alpha+\beta)} \tag{65}$$

Die Formel für die Formänderungsarbeit lautet

$$W = \frac{\sigma^2}{2\cdot E}\int dV \tag{66}$$

und da keine Formänderung auftritt

$$W = \frac{\sigma^2}{2\cdot E}\cdot V. \tag{67}$$

Die Federarbeit über den Weg v_p entspricht nun der Formänderungsarbeit in den beiden Gelenken

$$\frac{F\cdot v_p}{2} = W_1 + W_2 = \frac{\sigma_1^2}{2\cdot E_1}\cdot A_1\cdot l_1 + \frac{\sigma_2^2}{2\cdot E_2}\cdot A_2\cdot l_2 \quad |\, \sigma = \frac{F}{A} \tag{68}$$

$$\frac{F\cdot v_p}{2} = \frac{F_1^2}{2\cdot E_1\cdot A_1^2}\cdot A_1\cdot l_1 + \frac{F_2^2}{2\cdot E_2\cdot A_2^2}\cdot A_2\cdot l_2 \tag{69}$$

$$F\cdot v_p = \frac{F^2}{sin^2(\alpha+\beta)}\left(\frac{cos^2\beta\cdot l_1}{E_1\cdot A_1} + \frac{cos^2\alpha\cdot l_2}{E_2\cdot A_2}\right) \tag{70}$$

$$v_p = \frac{F}{sin^2(\alpha+\beta)}\left(\frac{cos^2\beta\cdot l_1}{E_1\cdot A_1} + \frac{cos^2\alpha\cdot l_2}{E_2\cdot A_2}\right) \tag{71}$$