Schwingender Träger

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 10.01.2024

Überarbeitung:

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung:

Schwingender Träger auf zwei Stützen unter Berücksichtigung der Federarbeit des Trägers.

Anwendungs-Datei:

1 Ansatz unter Nichtbeachtung der Trägermasse

Darstellung des Belastungsfalls (Bild 1).

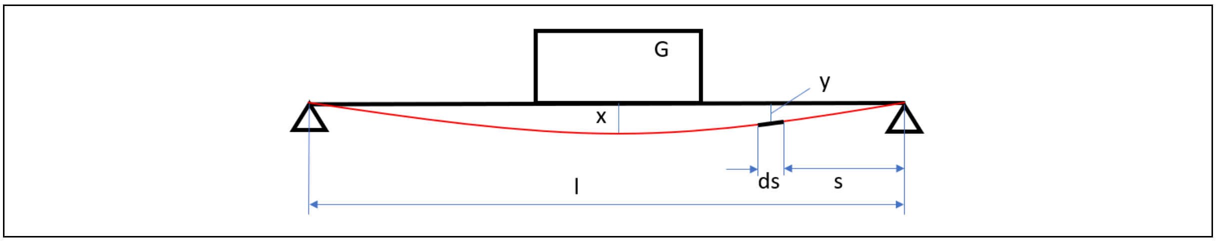

Bild 1. Schwingender Träger auf zwei Stützen

Aus den bekannten Formeln zur Biegelinie folgt für

$$\mathrm{x} = \frac{G \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I}. \tag{1}$$

$$\mathrm{y} = \frac{G \cdot l^3 \cdot s}{16 \cdot E \cdot I \cdot l}\left(1 - \frac{4s^2}{3l^2}\right). \tag{2}$$

Das betrachtete Massenelement an der Stelle s ist

$$\mathrm{dm} = \mathrm{q} \cdot \mathrm{ds} \tag{3}$$

Aussage:

In den Gleichungen für x und y findet die Trägermasse keine Berücksichtigung. Sind Träger von geringer Länge vorhanden, so ist dies in Betrachtung auf den Rechenaufwand und der geringen Fehlergröße empfehlenswert.

Einsetzen von x in die Gleichung von y

$$\mathrm{y} = 3\frac{s}{l}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{s^2}{l^2}\right)x. \tag{4}$$

Für die Schwingung an der Stelle s folgt

$$\mathrm{v(s)} = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = 3\frac{s}{l}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{s^2}{l^2}\right)\dot{x} = \frac{s}{l} \cdot \frac{3\,l^2 - 4\,s^2}{l^2}\dot{x}. \tag{5}$$

Der Arbeitsanteil des Massenteils ist

$$dW = \frac{dm}{2} \cdot \dot{y}^2 = \frac{dm}{2} \cdot \frac{s^2}{l^6}(3\,l^2 - 4\,s^2)^2 \cdot \dot{x}^2 \quad |\, dm = \frac{q \cdot ds}{g} \tag{6}$$

$$dW = \frac{q \cdot ds}{2 \cdot \mathrm{g}} \cdot \frac{s^2}{l^6} \cdot \dot{x}^2(9\,l^4 - 24\,l^2 s^2 + 16\,s^4) \tag{7}$$

$$dW = \frac{q \cdot \dot{x}^2}{2 \cdot \mathrm{g} \cdot l^6}(9\,l^4 s^2 - 24\,l^2 s^4 + 16\,s^6)\,ds. \tag{8}$$

Durch Integration ergibt sich der Arbeitsanteil des Trägers

$$W = 2\int_0^{\frac{l}{2}} dW = \frac{q \cdot \dot{x}^2}{\mathrm{g} \cdot l^6}\int(9\,l^4 s^2 - 24\,l^2 s^4 + 16\,s^6)\,ds \tag{9}$$

$$W = \frac{q \cdot \dot{x}^2}{\mathrm{g} \cdot l^6}\left|3\,l^4 s^3 - \frac{24}{5}\,l^2 s^5 + \frac{16}{7}\,s^7\right|_0^{\frac{l}{2}} \tag{10}$$

$$W = \frac{q \cdot \dot{x}^2}{\mathrm{g} \cdot l^6}\left(3 \cdot l^4 \cdot \frac{l^3}{8} - \frac{24}{5} \cdot l^2 \cdot \frac{l^5}{32} + \frac{16}{7} \cdot \frac{l^7}{128}\right) \tag{11}$$

$$W = \frac{q \cdot \dot{x}^2}{\mathrm{g}}\,l\left(\frac{3}{8} - \frac{24}{5 \cdot 32} + \frac{16}{7 \cdot 128}\right) \tag{12}$$

$$W = \frac{17}{70} \cdot \frac{q \cdot \dot{x}^2 \cdot l}{\mathrm{g}} \quad |\,\frac{q \cdot l}{g} = m_T = Masse\ des\ Trägers \tag{13}$$

$$W = \frac{17}{70} \cdot m_T \cdot \dot{x}^2 \quad |\,Arbeitsanteil\ des\ Trägers \tag{14}$$

Damit ergibt sich für die DGL

$$\frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{17}{70} \cdot m_T \cdot \dot{x}^2 + \frac{c \cdot x^2}{2} = \frac{c \cdot a^2}{2} \tag{15}$$

$$\dot{x}^2 \left(m + \frac{17}{35} m_T\right) = c(a^2 - x^2) \tag{16}$$

2 Ansatz unter Beachtung der Trägermasse

Darstellung des Belastungsfalls (Bild 2).

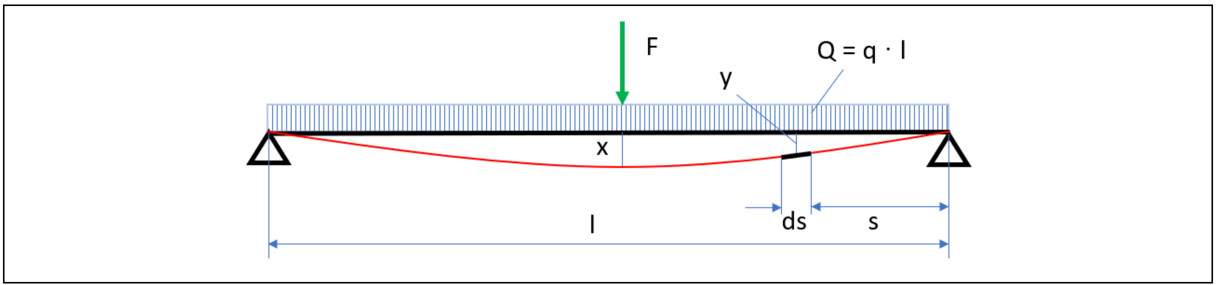

Bild 2. Schwingender Träger auf zwei Stützen unter Beachtung der Trägermasse

$$x = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + \frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{384 \cdot E \cdot I} \tag{17}$$

$$y = \frac{F \cdot l^3 \cdot s}{16 \cdot E \cdot I \cdot l}\left(1 - \frac{4s^2}{3l^2}\right) + \frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{384 \cdot E \cdot I}\left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right)\left(1 - \frac{4s^2}{5 \cdot l^2}\right) \tag{18}$$

$$\frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{384 \cdot E \cdot I} = x - \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} \tag{19}$$

$$y = \frac{3 \cdot F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I \cdot l} \cdot \frac{s}{l}\left(1 - \frac{4s^2}{3l^2}\right) + x\left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right)\left(1 - \frac{4s^2}{5 \cdot l^2}\right) - \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I \cdot l}\left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right)\left(1 - \frac{4s^2}{5 \cdot l^2}\right) \tag{20}$$

$$y = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I \cdot l} \cdot \left(\frac{3s}{l}\left(1 - \frac{4s^2}{3l^2}\right) - \left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right)\left(1 - \frac{4s^2}{5 \cdot l^2}\right)\right) + x\left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right)\left(1 - \frac{4s^2}{5 \cdot l^2}\right) \tag{21}$$

$$\dot{y} = \dot{x}\left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right)\left(1 - \frac{4s^2}{5 \cdot l^2}\right) \tag{22}$$

$$\dot{y}^2 = \dot{x}^2\left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right)^2\left(1 - \frac{4s^2}{5 \cdot l^2}\right)^2 \tag{23}$$

$$\dot{y}^2 = \dot{x}^2\left(1 - \frac{8\,s^2}{l^2} + \frac{16\,s^4}{l^4}\right)\left(1 - \frac{8\,s^2}{5\,l^2} + \frac{16\,s^4}{25\,l^4}\right) \tag{24}$$

$$\dot{y}^2 = \dot{x}^2\left(1 - \frac{8\,s^2}{5\,l^2} + \frac{16\,s^4}{25\,l^4} - \frac{8\,s^2}{l^2} + \frac{8 \cdot 8\,s^4}{5\,l^4} - \frac{8 \cdot 16\,s^6}{25\,l^6} + \frac{16\,s^4}{l^4} - \frac{8 \cdot 16\,s^6}{5\,l^6} + \frac{16 \cdot 16\,s^8}{25\,l^8}\right) \tag{25}$$

$$\dot{y}^2 = \dot{x}^2\left(1 - \left(\frac{8}{5} + 8\right)\frac{s^2}{l^2} + \left(\frac{16}{25} + \frac{64}{5} + 16\right)\frac{s^4}{l^4} - \left(\frac{8 \cdot 16}{25} + \frac{8 \cdot 16}{5}\right)\frac{s^6}{l^6} + \frac{256\,s^8}{25\,l^8}\right) \tag{26}$$

$$\dot{y}^2 = \dot{x}^2\left(1 - \frac{48\,s^2}{5\,l^2} + \frac{736\,s^4}{25\,l^4} - \frac{768\,s^6}{25\,l^6} + \frac{256\,s^8}{25\,l^8}\right) \tag{27}$$

$$dW = \frac{dm}{2} \cdot \dot{y}^2 \tag{28}$$

$$W = 2\int_0^{\frac{l}{2}} dW = \int_0^{\frac{l}{2}} dm \cdot \dot{y}^2 \quad \mid dm = \frac{q \cdot ds}{g} \tag{29}$$

$$W = \frac{q \cdot \dot{x}^2}{g \cdot 25 \cdot l^8}\int_0^{\frac{l}{2}}(25\,l^8 - 240\,l^6 s^2 + 736\,l^4 s^4 - 768\,l^2 s^6 + 256\,s^8)ds \tag{30}$$

$$W = \frac{q \cdot \dot{x}^2}{g \cdot 25 \cdot l^8}\left|25\,l^8 s - 240\,l^6\frac{s^3}{3} + 736\,l^4\frac{s^5}{5} - 768\,l^2\frac{s^7}{7} + 256\,\frac{s^9}{9}\right|_0^{\frac{l}{2}} \tag{31}$$

$$W = \frac{q \cdot \dot{x}^2}{g \cdot 25 \cdot l^8} \left| 25\, l^8 s - 80\, l^6 s^3 + \frac{736}{5}\, l^4 s^5 - \frac{768}{7}\, l^2 s^7 + \frac{256}{9}\, s^9 \right|_0^{\frac{l}{2}} \tag{32}$$

$$W = \frac{q \cdot \dot{x}^2}{g \cdot 25 \cdot l^8} \left(\frac{25}{2}\, l^9 - \frac{80}{8}\, l^9 + \frac{736}{5 \cdot 32}\, l^9 - \frac{768}{7 \cdot 128}\, l^9 + \frac{256}{9 \cdot 512}\, l^9 \right) \tag{33}$$

$$W = \frac{q \cdot \dot{x}^2}{g \cdot 25 \cdot} \cdot l \left(\frac{25}{2} + \frac{736}{5 \cdot 32} + \frac{256}{9 \cdot 512} - 10 - \frac{768}{7 \cdot 128} \right) \tag{34}$$

$$W = \frac{q \cdot \dot{x}^2}{g \cdot 25 \cdot} \cdot l \left(\frac{25}{2} + \frac{23}{5} + \frac{1}{18} - 10 - \frac{6}{7} \right) \tag{35}$$

$$W = \frac{q \cdot \dot{x}^2}{g \cdot 25 \cdot} \cdot l \left(\frac{1125+414+5}{90} - \frac{76}{7} \right) \tag{36}$$

$$W = \frac{q \cdot \dot{x}^2}{g \cdot 25 \cdot} \cdot l \left(\frac{772}{45} - \frac{76}{7} \right) \tag{37}$$

$$W = \frac{q \cdot \dot{x}^2}{g \cdot 25 \cdot} \cdot l \cdot \frac{1984}{315} \quad \left| \ \frac{q \cdot l}{g} = m_T \right. \tag{38}$$

$$W = 0{,}252 \cdot \dot{x}^2 \cdot m_T \quad | \mathit{Arbeitsanteil\ des\ Trägers} \tag{39}$$

Für die DGL ergibt sich

$$\dot{x}^2 (m + 0{,}252\, m_T) = c(a^2 - x^2) \tag{40}$$