

Reihen- und Parallelschaltung von Federn

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 03.12.2023

Überarbeitung:

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung:

In der Praxis treten häufig auch Kombinationen von Federelementen auf. Hier werden Beispiele aufgezeigt.

Anwendungs-Datei:

1 Parallelschaltung

Bei der Parallelschaltung von Federn haben alle die gleiche Auslenkung (Bild 1).

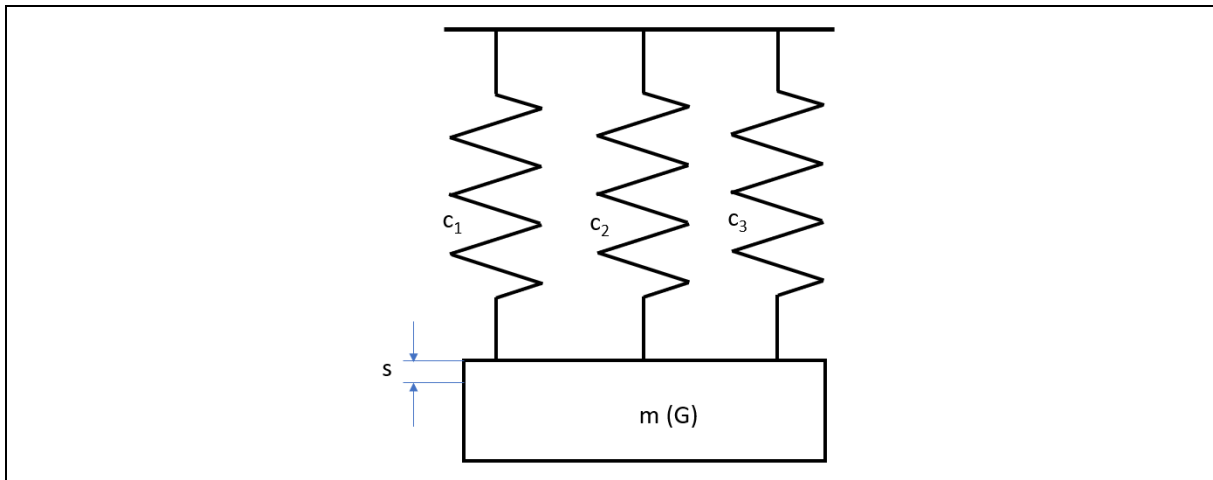


Bild 1. Parallelschaltung von Federn

Die Auslenkung erfolgt durch das Gewicht G

$$F_1 + F_2 + F_3 = G. \quad (1)$$

Für die Auslenkung s einer Feder mit der Konstanten c ist die Kraft F

$$F = c \cdot s. \quad (2)$$

Eingesetzt in (1) ergibt sich

$$c_1 \cdot s + c_2 \cdot s + c_3 \cdot s = G \quad (3)$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = \frac{G}{s} = c_{ges} \quad (4)$$

Bei der Parallelschaltung addieren sich die Federkonstanten in ihrer Wirkung.

2 Reihenschaltung

Bei der Reihenschaltung von Federn addieren sich die einzelnen Auslenkungen (Bild 2).

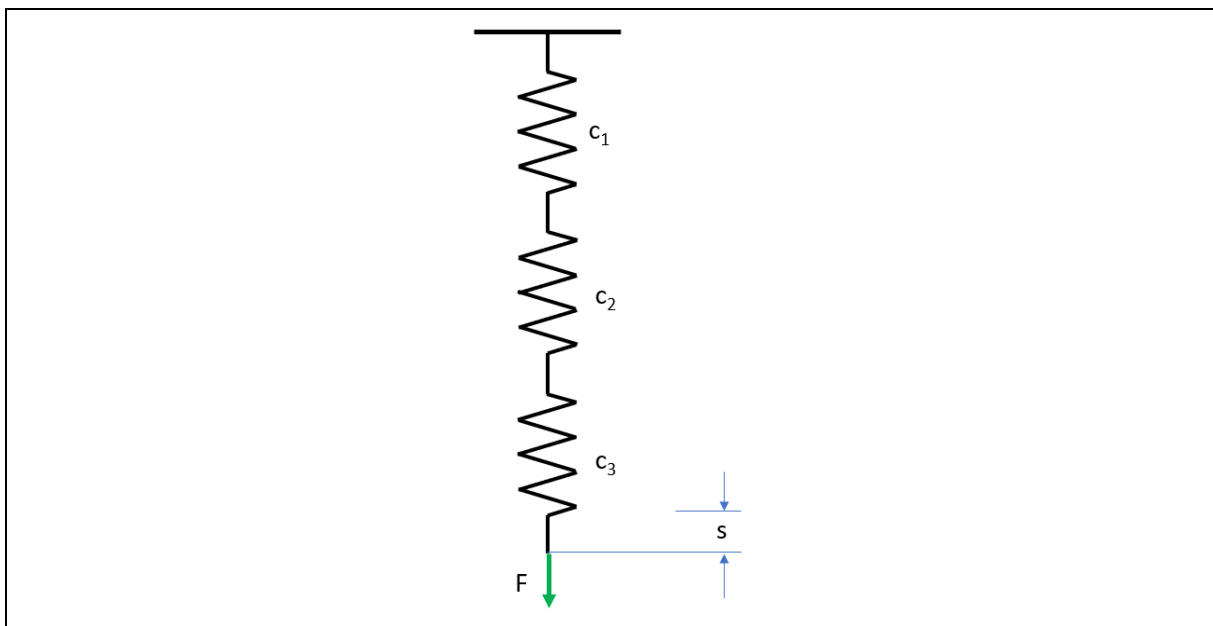


Bild 2. Reihenschaltung von Federn

Die Auslenkung ist die Summe der einzelnen Auslenkungen

$$s = s_1 + s_2 + s_3. \quad (5)$$

Die Auslegung s einer Feder ist der Quotient von Kraft F und Konstante c

$$s = \frac{F}{c}. \quad (6)$$

Eingesetzt in (5) ergibt sich

$$\frac{F}{c_{ges}} = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2} + \frac{F}{c_3} \quad (7)$$

$$\frac{1}{c_{ges}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \quad (8)$$

Bei der Reihenschaltung addieren sich die einzelnen Federkonstanten reziprok in ihrer Wirkung.

3 Anwendungsbeispiel

Wie groß muss die Masse für das dargestellte schwingungsfähige System (Bild 3) werden, wenn $T = 0,4$ s ist.

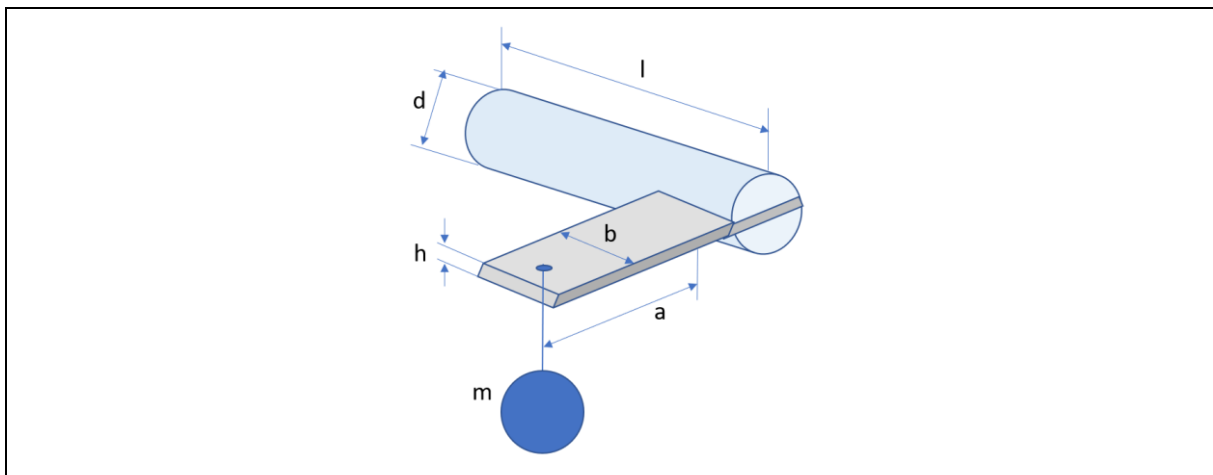


Bild 3. Beispiel einer Federkombination

Gegeben sind die Werte

$$l = 70 \text{ cm}$$

$$d = 30 \text{ mm}$$

$$G = 8,5 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$$

$$a = 50 \text{ cm}$$

$$b = 50 \text{ cm}$$

$$h = 6 \text{ mm}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

Der Federweg ergibt sich aus den Federwegen der einzelnen Federn (Reihenschaltung). Mit der Torsion der Drehfeder (Bild 4) und der Durchbiegung der Blattfeder (Bild 5) folgt

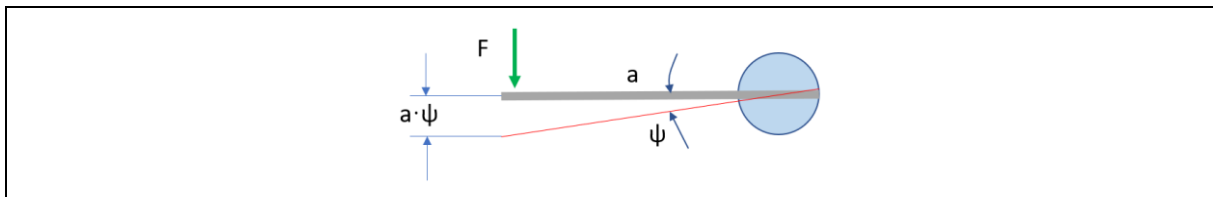


Bild 4. Torsion der Drehfeder

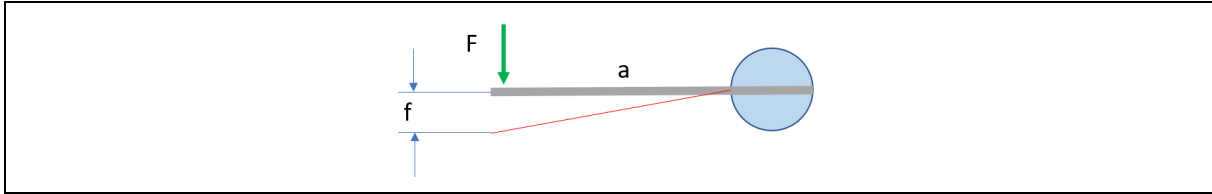


Bild 5. Durchbiegung der Blattfeder

$$a \cdot \psi + f = s. \quad (9)$$

Aus der Beziehung

$$c = \frac{F}{s} \quad (10)$$

folgt

$$c = \frac{F}{a \cdot \psi + f} \quad (11)$$

Es ergibt sich weiterhin aus bekannten Formeln

$$\psi = \frac{F \cdot a^2}{I_P \cdot G} \quad (12)$$

und

$$f = \frac{F \cdot a^3}{3 \cdot E \cdot I_R} \quad (13)$$

Damit ergibt sich weiterhin für die Federkonstante

$$c = \frac{3 \cdot G \cdot E \cdot I_R \cdot I_P}{a^2 \cdot I \cdot 3 \cdot E \cdot I_R + a^3 \cdot G \cdot I_P} \quad (14)$$

Weiterhin ergibt sich

$$\frac{1}{c} = \frac{3 \cdot a^2 \cdot I \cdot E \cdot I_R}{a^2 \cdot I \cdot 3 \cdot E \cdot I_R + a^3 \cdot G \cdot I_P} + \frac{a^3 \cdot G \cdot I_P}{3 \cdot G \cdot E \cdot I_R \cdot I_P} \quad (15)$$

$$\frac{1}{c} = \frac{a^2 \cdot I}{G \cdot I_P} + \frac{a^3}{3 \cdot E \cdot I_R} \quad (16)$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\frac{G \cdot I_P}{a^2 \cdot I}} + \frac{1}{\frac{3 \cdot E \cdot I_R}{a^3}} \quad (17)$$

Kommen wir zur Lösung der Aufgabe.

$$\frac{m}{c} = \frac{0,16 \text{ s}^2}{4 \cdot \pi^2} = 0,00406 \text{ s}^2$$

$$I_P = 3,976 \cdot 2 \text{ cm}^4$$

$$I_R = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 6^3}{12} = 90 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^4$$

$$c = \frac{3 \cdot 8,5 \cdot 2,2 \cdot 10^{11} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \cdot 7,952}{5^2 \cdot 10^2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 3,2 \cdot 10^6 \cdot 9 \cdot 10^{-2} + 5^3 \cdot 10^3 \cdot 8,5 \cdot 10^5 \cdot 7,952} = 4,28 \frac{\text{kp}}{\text{cm}}$$

$$m = 0,00406 \text{ s}^2 \cdot 4,28 \frac{\text{kp}}{\text{cm}} = 1,74 \frac{\text{kp s}^2}{\text{m}}$$

$$G = 1,74 \frac{\text{kp s}^2}{\text{m}} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 17,1 \text{ kp}$$

4 Anwendungsbeispiel

Welche Schwingungsdauer und Eigenfrequenz hat das dargestellte System (Bild 6), wenn die Stange 32 kp wiegt und mit einem Zusatzgewicht von 8 kp belastet ist?

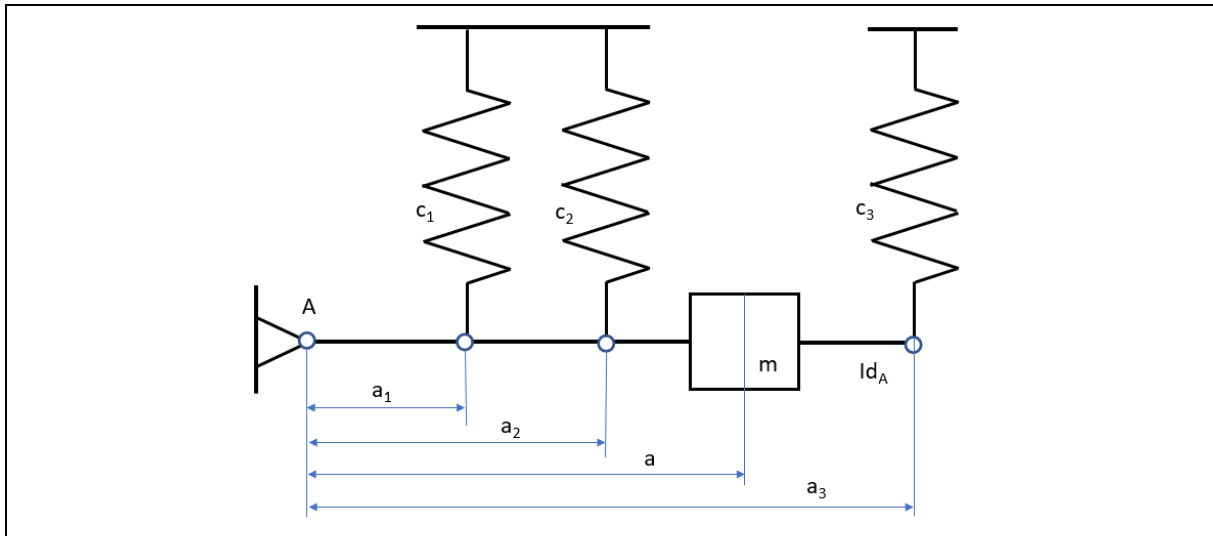


Bild 6. Schwingungssystem

Komplexe Systeme werden gerne durch ein Ersatzbild dargestellt (Bild 7).

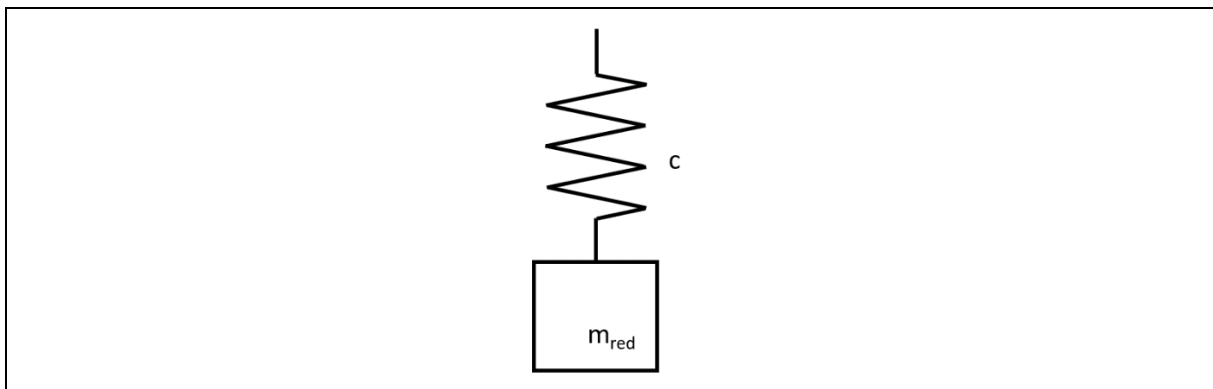


Bild 7. Ersatzschaltbild

Für die reduzierte Masse des Ersatzschaltbildes ergibt sich die Gleichung

$$m_{red} = m + \frac{Id_A}{a^2} \quad (18)$$

Die Federkonstante c des Ersatzschaltbildes ergibt sich aus der Anschauung, dass sich die Auswirkung der vorhandenen Federkräfte durch eine Ersatzkraft an der Stelle a ersetzen lässt.

$$F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 + F_3 \cdot a_3 = F \cdot a \quad (19)$$

Mit der Auslenkung y und der Beziehung

$$F = y \cdot c \quad (20)$$

folgt

$$y_1 \cdot c_1 \cdot a_1 + y_2 \cdot c_2 \cdot a_2 + y_3 \cdot c_3 \cdot a_3 = y \cdot c \cdot a \quad (21)$$

Aus den Proportionen (Bild 8) ergibt sich ebenfalls

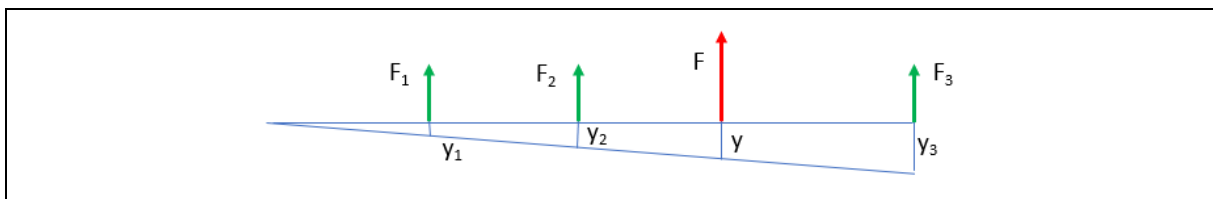


Bild 8. Proportionen der Auslenkung

$$\frac{y_1}{a_1} = \frac{y_2}{a_2} = \frac{y_3}{a_3} = \frac{y}{a} \quad (22)$$

Eingesetzt ergibt sich weiter

$$y \cdot c_1 \cdot \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 + y \cdot c_2 \cdot \left(\frac{a_2}{a}\right)^2 + y \cdot c_3 \cdot \left(\frac{a_3}{a}\right)^2 = y \cdot c \cdot a. \quad (23)$$

Die Ersatzfederkonstante hat somit die Größe

$$c = c_1 \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 + c_2 \left(\frac{a_2}{a}\right)^2 + c_3 \left(\frac{a_3}{a}\right)^2. \quad (24)$$

Die Beispielparameter sind

$$a_1 = 700 \text{ mm}; a_2 = 900 \text{ mm}; a_3 = 1400 \text{ mm}; a = 1200 \text{ mm}$$

$$c_1 = 2 \text{ kp/cm}; c_2 = 3 \text{ kp/cm}; c_3 = 2 \text{ kp/cm}$$

Zu bestimmen ist gleichfalls noch die Größe I_{dA} (Bild 9).

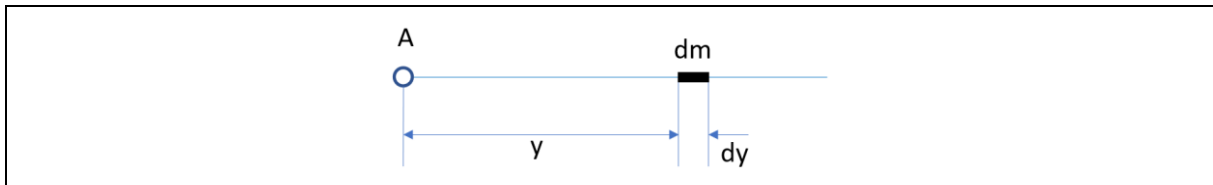


Bild 9. Massenelement des Stabes

$$dm = \frac{m}{l} dy \quad (25)$$

$$I_{dA} = \int dm \cdot y^2 = \frac{m}{l} \int_0^l y^2 \cdot dy \quad (26)$$

$$I_{dA} = \frac{m}{l} \left| \frac{y^3}{3} \right|_0^l = \frac{m \cdot l^2}{3} \quad (27)$$

$$I_{dA} = \frac{32 \cdot 1,4^2}{3 \cdot 9,81} = 2,12 \text{ kpms}^2$$

$$m_{\text{red}} = 0,815 \frac{2,12}{1,44} = 2,285 \frac{\text{kps}^2}{\text{m}}$$

$$c = 2 \cdot 0,34 + 3 \cdot 0,56 + 2 \cdot 1,36 = 5,08 \frac{\text{kp}}{\text{cm}}$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{508}{2,285} = 223 \frac{1}{\text{s}^2}; \omega = 14,9 \text{ s}^{-1}$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{6,28}{14,9} = 0,421 \text{ s}$$

5 Aufgabe

Die Berechnungen sollen in einem Formblatt erfolgen.