Schwingende Flüssigkeit

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 03.12.2023

Überarbeitung:

Quelle: Vorlesungsscript

Beim Transport von Flüssigkeiten treten oft Beschleunigungskräfte auf, die die Flüssigkeit im Behälter zum Hin- und Herschwingen anregen. Durch ein Trennsystem von zwei Behältern lässt sich die Bewegung verringern. Für diesen Vorgang soll die DGl aufgestellt und Beispiele untersucht werden.

Anwendungs-Datei: 06-04-02_SchwingendeFluessigkeit.xlsx

1 Modell

Zwei Behälter sind miteinander verbunden (Bild 1).

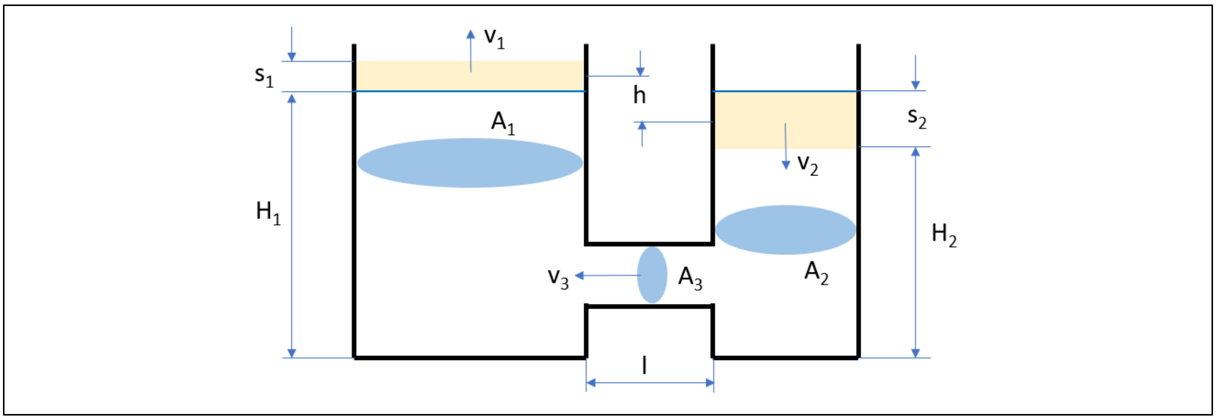

Bild 1. Behältersystem

Das Modell unterliegt folgenden Randbedingungen

$$h = \frac{s_1 + s_2}{2}, \tag{1}$$

$$A_1 \cdot s_1 = A_2 \cdot s_2 \tag{2}$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = A_3 \cdot v_3. \tag{3}$$

Außerdem ist

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt}; v_2 = \frac{ds_2}{dt}; v_3 = \frac{ds_3}{dt} \tag{4}$$

2 Potentielle Energiedifferenz

Die potentielle Energiedifferenz ergibt sich mit der Wichte ρ aus dem Ansatz

$$W_P = A_1 \cdot s_1 \cdot \rho \cdot h = A_1 \cdot s_1 \cdot \rho \cdot \frac{s_1 + s_2}{2} \tag{5}$$

$$= \frac{A_1 \cdot \rho}{2} (s_1^2 + s_1 \cdot s_2). \tag{6}$$

Durch Umstellung und Einsetzen von (2) folgt

$$W_P = \frac{A_1 \cdot \rho}{2} \left(s_1^2 + s_1^2 \cdot \frac{A_1}{A_2} \right) \tag{7}$$

$$= \frac{A_1 \cdot \rho}{2} s_1^2 \left(1 + \frac{A_1}{A_2} \right). \tag{8}$$

3 Vorhandene kinetische Energie

$$W_K = \frac{1}{2} (m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2 + m_3 \cdot v_3^2) \tag{9}$$

$$= \frac{1}{2} \left(m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 + m_3 \cdot v_1^2 \left(\frac{A_1}{A_3} \right)^2 \right). \tag{10}$$

Für die Massen gilt

$$m_1 = A_1 (H_1 + s_1) \frac{\rho}{g}; m_2 = A_2 (H_2 - s_2) \frac{\rho}{g}; m_3 = A_3 \cdot l \cdot \frac{\rho}{g}. \tag{11}$$

Es folgt weiter

$$W_K = \frac{v_1^2}{2} \cdot \frac{\rho}{g} \left(A_1 \cdot (H_1 + s_1) + A_2 \cdot (H_2 - s_2) \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 + A_3 \cdot l \cdot \left(\frac{A_1}{A_3} \right)^2 \right). \tag{12}$$

$$= \frac{v_1^2}{2} \cdot \frac{\rho}{g} \cdot A_1 \left((H_1 + s_1) + (H_2 - s_2) \left(\frac{A_1}{A_2} \right) + l \cdot \left(\frac{A_1}{A_3} \right) \right). \tag{13}$$

$$= \frac{v_1^2}{2} \cdot \frac{\rho}{g} \cdot A_1 \left(H_1 + s_1 + H_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right) - s_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right) + l \cdot \left(\frac{A_1}{A_3}\right) \right) \tag{14}$$

Es gilt weiterhin aus der Kontinuitätsgleichung

$$s_2 \frac{A_1}{A_2} = s_1 \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{A_1}{A_2} = s_1 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2. \tag{15}$$

Es folgt weiter

$$W_K = \frac{v_1^2}{2} \cdot \frac{\rho}{g} \cdot A_1 \left(H_1 + s_1 + H_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right) - s_1 \frac{A_1^2}{A_2^2} + l \cdot \left(\frac{A_1}{A_3}\right) \right) \tag{16}$$

$$= \frac{v_1^2}{2} \cdot \frac{\rho}{g} \cdot A_1 \left(H_1 + H_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right) + l \cdot \left(\frac{A_1}{A_3}\right) + s_1 \left(1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right) \right) \tag{17}$$

Dieser Rechnungsgang wird einfacher durch die Annahme, dass s_1 gegenüber H_1 sehr klein ist. Diese Möglichkeit ist konstruktiv gegeben. Damit wird s_1 vernachlässigbar und es ergibt sich

$$W_K = \frac{v_1^2}{2} \cdot \frac{\rho}{g} \cdot A_1 \left(H_1 + H_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right) + l \cdot \left(\frac{A_1}{A_3}\right) \right). \tag{18}$$

4 Differentialgleichung

Nach dem Prinzip der Energieerhaltung ergibt sich somit für das System

$$konstant = \frac{A_1 \cdot \rho}{2} s_1^2 \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) + \frac{v_1^2}{2} \cdot \frac{\rho}{g} \cdot A_1 \left(H_1 + H_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right) + l \cdot \left(\frac{A_1}{A_3}\right) \right) \tag{19}$$

$$\frac{A_1 \cdot \rho}{2} 2 s_1 \frac{ds_1}{dt} \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) + 2 v_1 \cdot \frac{A_1 \cdot \rho}{2 \cdot g} \cdot \frac{dv_1}{dt} \left(H_1 + H_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right) + l \cdot \left(\frac{A_1}{A_3}\right) \right) = 0 \tag{20}$$

$$s_1 \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) \mathrm{g} + \frac{dv_1}{dt} \left(H_1 + H_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right) + l \cdot \left(\frac{A_1}{A_3}\right) \right) = 0 \tag{21}$$

$$\ddot{s}_1 \left(H_1 + H_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right) + l \cdot \left(\frac{A_1}{A_3}\right) \right) + s_1 \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) \mathrm{g} = 0. \tag{22}$$

Damit folgt die DGL

$$\ddot{s}_1 + \frac{g(A_1 + A_2)}{A_2 \left(H_1 + H_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right) + l \cdot \left(\frac{A_1}{A_3}\right) \right)} s_1 = 0 \tag{23}$$

mit dem Schwingungsverhalten

$$\omega^2 = \frac{g(A_1 + A_2)}{A_2 \left(H_1 + H_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right) + l \cdot \left(\frac{A_1}{A_3}\right) \right)} \tag{24}$$

5 Anwendungsbeispiel

Wie beeinflusst die Größe A_3 das Schwingungsverhalten. Die Größe wird für den Bereich von 0,01 m^2 bis 0,1 m^2 mit einer Schrittweite von 0,01 m^2 betrachtet.

Die Kreisfrequenz oder Winkelfrequenz ω ist ein Maß dafür, wie schnell eine Schwingung abläuft. Im Gegensatz zur Frequenz gibt sie aber nicht die Anzahl der Schwingungsperioden bezogen auf eine Zeitspanne an, sondern den überstrichenen Phasenwinkel der Schwingung pro Zeitspanne.

Die berechneten Werte sollen in einem Liniendiagramm dargestellt werden.

	A	B	C	D	E	F
1	H_1 =	2	m		A3 [m^2]	ω [s^{-1}]
2	H_2 =	2	m		0,01	1,21774668
3	A_1 =	1	m^2		0,02	1,50907966
4	A_2 =	0,3	m^2		0,03	1,66504994
5	l =	0,2	m		0,04	1,76365751
6					0,05	1,83195323
7					0,06	1,88215302
8					0,07	1,92064684
9					0,08	1,95111908
10					0,09	1,97584908
11					0,1	1,99632475

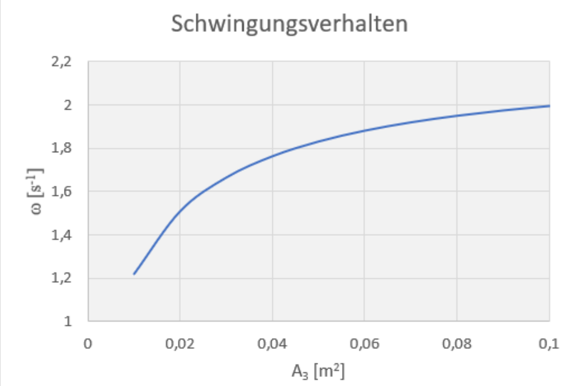

Bild 2. Schwingungsverhalten in Abhängigkeit vom Trennquarschnitt