

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 17.07.2019

Überarbeitung: 01.12.2023

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung: Betrachtet werden Fälle im Umgang mit Reibung.

Anwendungs-Datei:

1 Reibungskoeffizient

Die Antriebskraft, die benötigt wird um einen Körper in Bewegung zu halten, ist proportional dem Gewicht (Bild 1).

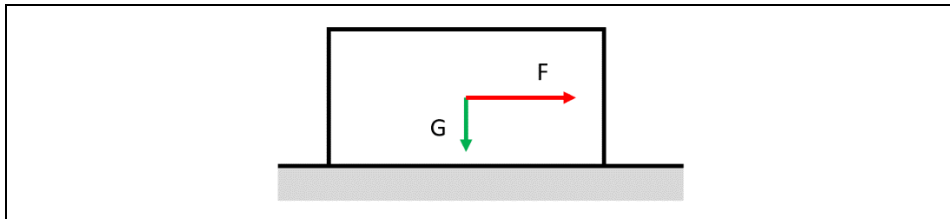


Bild 1. Flächenschwerpunkt eines Kurvenstücks

$$F = c \cdot G. \quad (1)$$

Der Proportionalfaktor c wird als Reibungskoeffizient bezeichnet. Den Bewegungsablauf zeigt ein F - t -Diagramm (Bild 2).

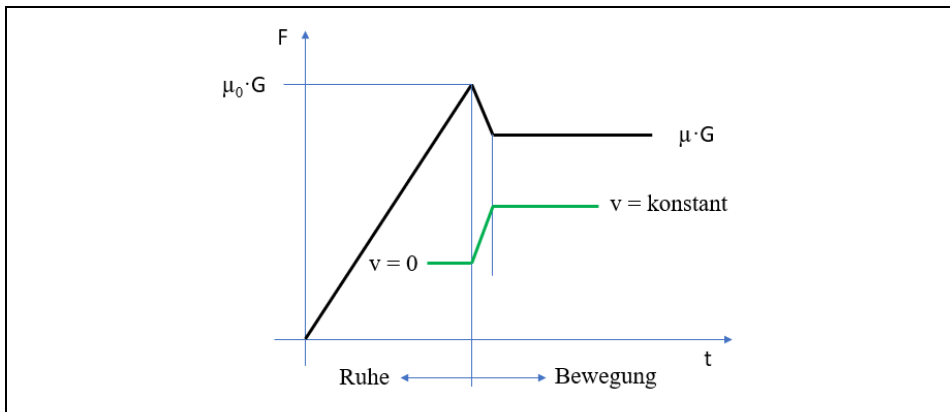


Bild 2. Betrachtung eines Flächenelements

In der Regel ist $\mu_0 > \mu$. Will man also die Kraft errechnen, mit der das System errechnet werden darf, ohne dass sich der Körper in Bewegung setzt, so errechnet man die Kraft mit μ und man hat somit eine kleine Sicherheit.

$$F = \mu \cdot G. \quad (2)$$

2 Reibung auf der schiefen Ebene

Ein Körper befindet sich auf einer schiefen Ebene (Bild 2). Es herrschen die folgenden Beziehungen

$$N = G \cdot \cos \alpha; \quad H = G \cdot \sin \alpha; \quad R = \mu \cdot N. \quad (3)$$

$R > H$: System in Ruhe

$R = H$: Grenzzustand und $v = \text{konstant}$

$R < H$: Beschleunigung

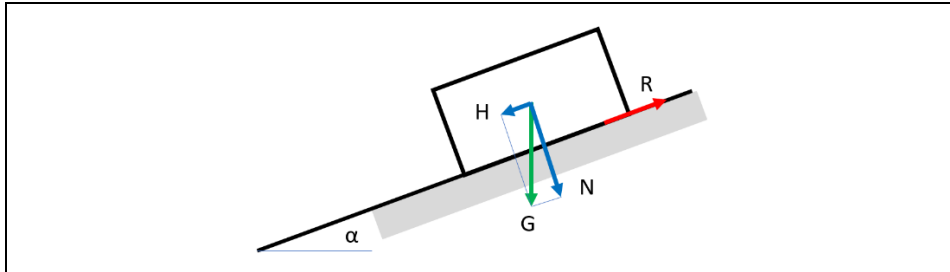


Bild 3. Körper auf einer schiefen Ebene

Bei der Betrachtung des Grenzzustandes $R = H$ ergibt sich

$$\mu \cdot N = H \quad (4)$$

$$\mu \cdot G \cdot \cos \alpha = G \cdot \sin \alpha \quad (5)$$

$$\mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad (6)$$

α wird als Reibungswinkel bezeichnet.

3 Reibung bei schräg angreifender Kraft

Statt einer schiefen Ebene, kann auch die Kraft F schräg auf eine Ebene zugreifen (Bild 4).

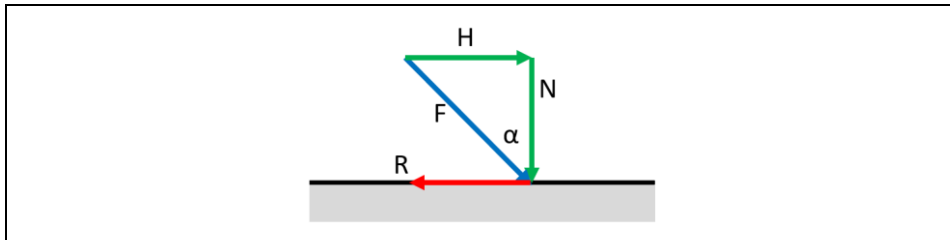


Bild 4. Schräg angreifende Kraft

Wird in den Gleichungen (4) und (5) G durch F ersetzt, so ergibt sich ebenfalls

$$\mu = \tan \alpha. \quad (7)$$

4 Reibung bei der Schraubenbewegung

4.1 Heben der Last

Das Kräfteverhältnis beim Heben der Last zeigt Bild 5.

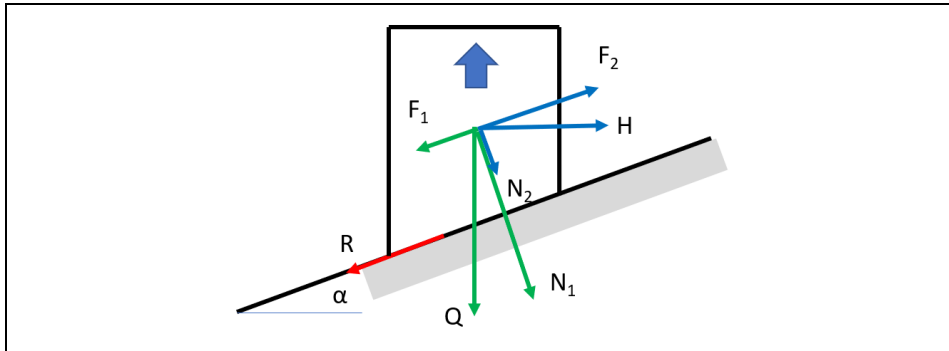


Bild 5. Kräfteverhältnis beim Heben der Last

$$F_1 = Q \cdot \sin \alpha; \quad F_2 = H \cdot \cos \alpha \quad (8)$$

$$N_1 = Q \cdot \cos \alpha; \quad N_2 = H \cdot \sin \alpha \quad (9)$$

$$R = (N_1 + N_2) \cdot \mu = (Q \cdot \cos \alpha + H \cdot \sin \alpha) \cdot \mu. \quad (8)$$

Der Gleichgewichtszustand (Grenzfall) ist gegeben mit

$$F_2 = F_1 + R. \quad (9)$$

Eingesetzt

$$H \cdot \cos \alpha = Q \cdot \sin \alpha + Q \cdot \cos \alpha \cdot \mu + H \cdot \sin \alpha \cdot \mu \quad (10)$$

$$H \cdot (\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha) = Q \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \quad (11)$$

$$H = \frac{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha} \cdot Q; \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad (12)$$

$$H = \frac{\tan \alpha + \mu}{1 - \mu \cdot \tan \alpha} \cdot Q; \quad \mu = \tan \rho \quad (13)$$

$$H = \tan(\rho + \alpha) \cdot Q \quad (14)$$

4.2 Senken der Last

$$F_1 = Q \cdot \sin \alpha; \quad F_2 = H \cdot \cos \alpha \quad (15)$$

$$N_1 = Q \cdot \cos \alpha; \quad N_2 = H \cdot \sin \alpha \quad (16)$$

$$R = (N_1 - N_2) \cdot \mu. \quad (17)$$

Der Gleichgewichtszustand (Grenzfall) ist gegeben mit

$$F_1 + F_2 = R. \quad (18)$$

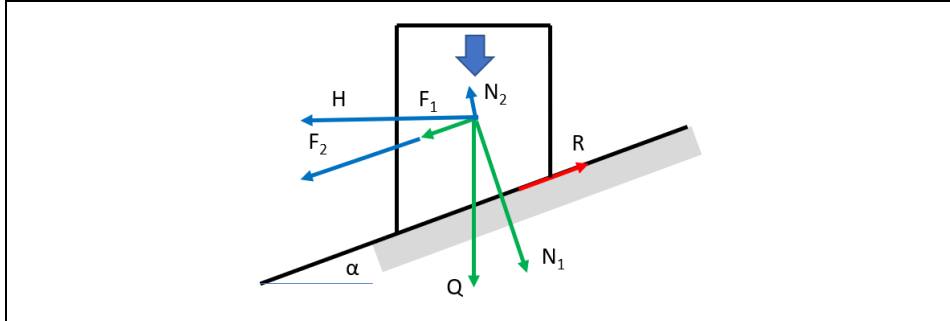


Bild 6. Kräfteverhältnis beim Senken der Last

Eingesetzt

$$H \cdot \cos \alpha + Q \cdot \sin \alpha = Q \cdot \cos \alpha \cdot \mu - H \cdot \sin \alpha \cdot \pi \quad (19)$$

$$H \cdot (\cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha) = Q \cdot (\mu \cdot \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (20)$$

$$H = \frac{\mu \cdot \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha} \cdot Q; \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad (21)$$

$$H = \frac{\mu - \tan \alpha}{1 + \mu \cdot \tan \alpha} \cdot Q; \quad \mu = \tan \rho \quad (22)$$

$$H = \tan(\rho - \alpha) \cdot Q \quad (23)$$

5 Reibungselement Bremse

5.1 Linksdrehend

Betrachtet wird eine Konstruktion in Bild 7.

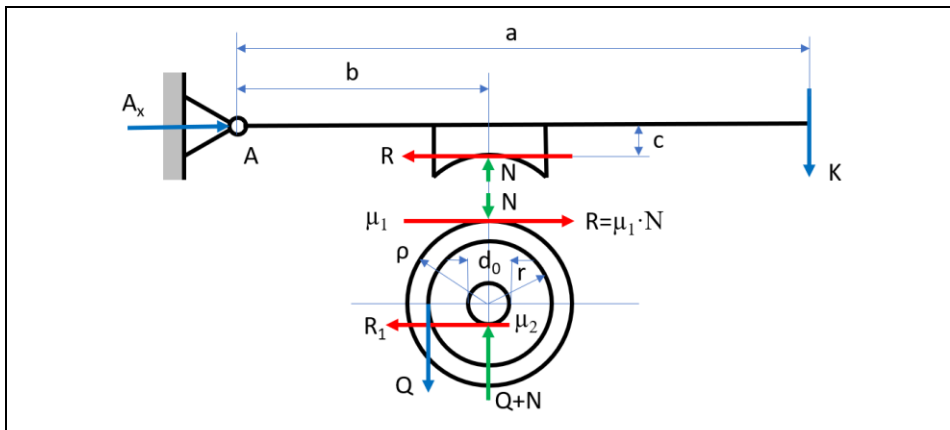


Bild 7. Kräfteverhältnis einer linksdrehenden Bremse

$$\sum M_A = 0 = K \cdot a + R \cdot c - N \cdot b \quad (24)$$

$$\sum M_A = 0 = K \cdot a + N \cdot \mu_1 \cdot c - N \cdot b \quad (25)$$

$$N \cdot (b - \mu_1 \cdot c) = K \cdot a \quad (26)$$

$$N = \frac{a}{b - \mu_1 \cdot c} \cdot K \quad (27)$$

$$Q \cdot r = \mu_1 \cdot N \cdot \rho + (Q + N) \cdot \mu_2 \cdot r_0 \quad (28)$$

$$Q \cdot r = \mu_1 \cdot N \cdot \rho + \mu_2 \cdot r_0 \cdot Q + \mu_2 \cdot r_0 \cdot N \quad (29)$$

$$Q \cdot (r - \mu_2 \cdot r_0) = N \cdot (\mu_1 \cdot \rho + \mu_2 \cdot r_0) \quad (30)$$

$$N = \frac{r - \mu_2 \cdot r_0}{\mu_1 \cdot \rho + \mu_2 \cdot r_0} \cdot Q \quad (31)$$

5.2 Rechtsdrehend

Betrachtet wird eine Konstruktion in Bild 8.

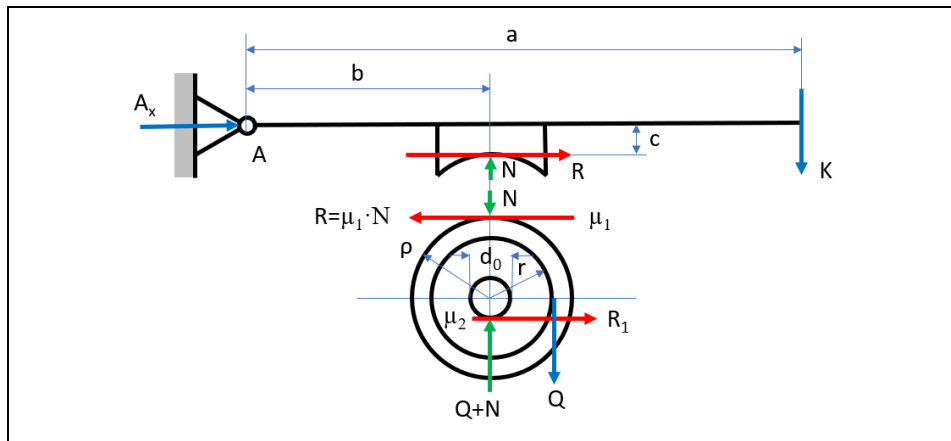


Bild 8. Kräfteverhältnis einer rechtsdrehenden Bremse

$$\sum M_A = 0 = K \cdot a - R \cdot c - N \cdot b \quad (32)$$

$$\sum M_A = 0 = K \cdot a - N \cdot \mu_1 \cdot c - N \cdot b \quad (33)$$

$$N \cdot (b - \mu_1 \cdot c) = K \cdot a \quad (34)$$

$$N = \frac{a}{b - \mu_1 \cdot c} \cdot K \quad (35)$$

$$Q \cdot r = \mu_1 \cdot N \cdot \rho + (Q + N) \cdot \mu_2 \cdot r_0 \quad (36)$$

$$Q \cdot r = \mu_1 \cdot N \cdot \rho + \mu_2 \cdot r_0 \cdot Q + \mu_2 \cdot r_0 \cdot N \quad (37)$$

$$Q \cdot (r - \mu_2 \cdot r_0) = N \cdot (\mu_1 \cdot \rho + \mu_2 \cdot r_0) \quad (38)$$

$$N = \frac{r - \mu_2 \cdot r_0}{\mu_1 \cdot \rho + \mu_2 \cdot r_0} \cdot Q \quad (39)$$

Allgemein gilt für die Beziehung zwischen Last und aufzubringender Kraft

$$K = \frac{(b - \mu_1 \cdot c)(r - \mu_2 \cdot r_0)}{a(\mu_1 \cdot \rho + \mu_2 \cdot r_0)} \quad (40)$$

6 Seilreibung

Im Fall I betrachten wir eine drehbare Rolle mit einfacher Seilumlenkung (Bild 9).

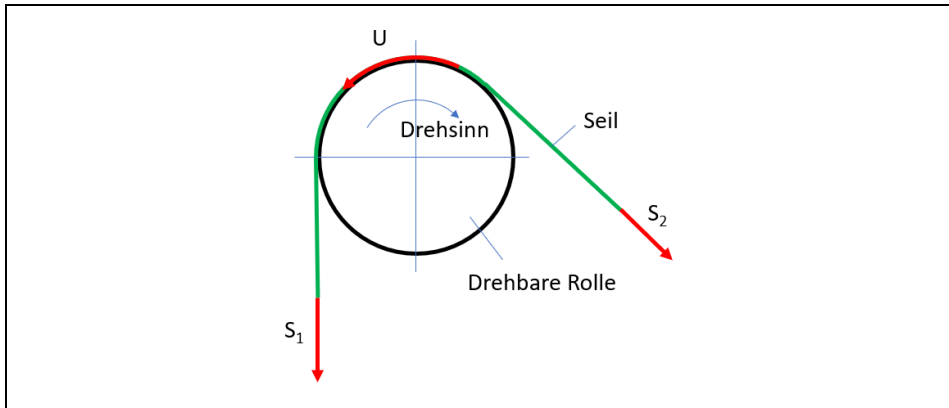


Bild 9. Kräfteverhältnisse bei drehbarer Rolle

Erkenntnis: $S_2 > S_1$

$$S_1 + U = S_2 \quad (41)$$

$$U = S_2 - S_1 \quad (42)$$

Im Fall II ist die Rolle feststehend (Bild 10).

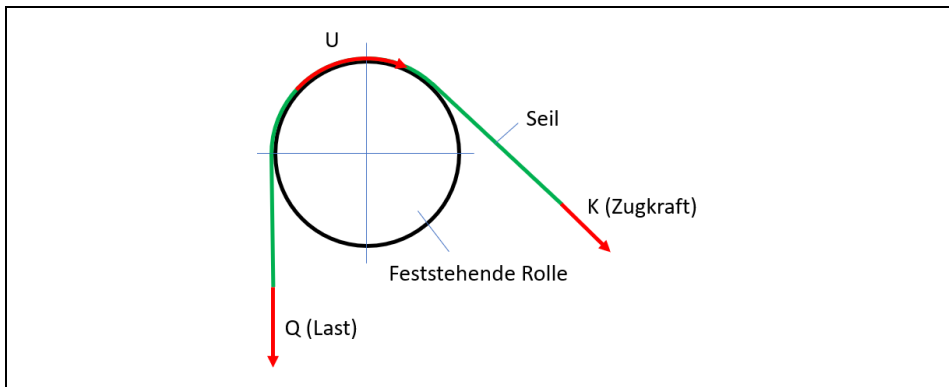


Bild 10. Kräfteverhältnisse bei feststehender Rolle

Erkenntnis: $Q > K$

$$K + U = Q \quad (43)$$

$$K = Q - U \quad (44)$$

Die Winkelverhältnisse für Fall I zeigt Bild 11.

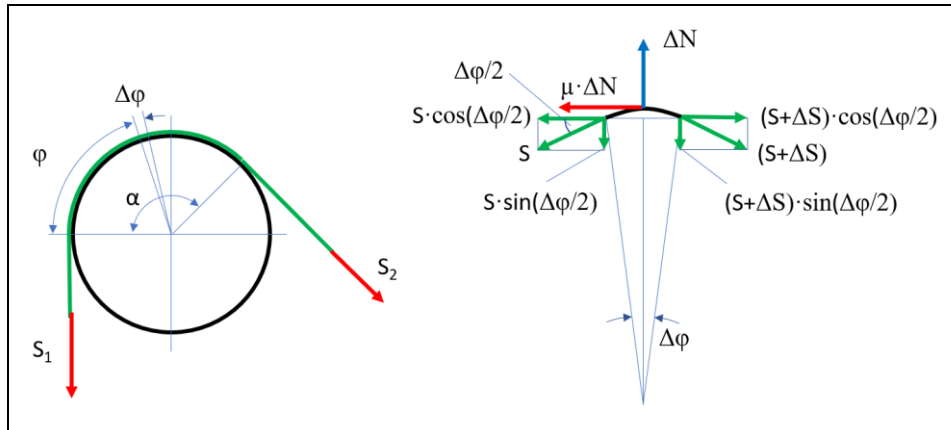


Bild 11. Kräfte an einem Differenzstück

$$S \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + \mu \cdot \Delta N = (S + \Delta S) \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \quad (45)$$

$$\Delta N = S \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + (S + \Delta S) \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \quad (46)$$

$$\sum_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} \mu \cdot \Delta N = U \quad (47)$$

$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu\alpha}, \text{ für Fall I} \quad (48)$$

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha}, \text{ für Fall II} \quad (49)$$

7 Differentialbremsen

Wie groß ist das bremsende Moment, wenn α und μ gegeben sind (Bild 12).

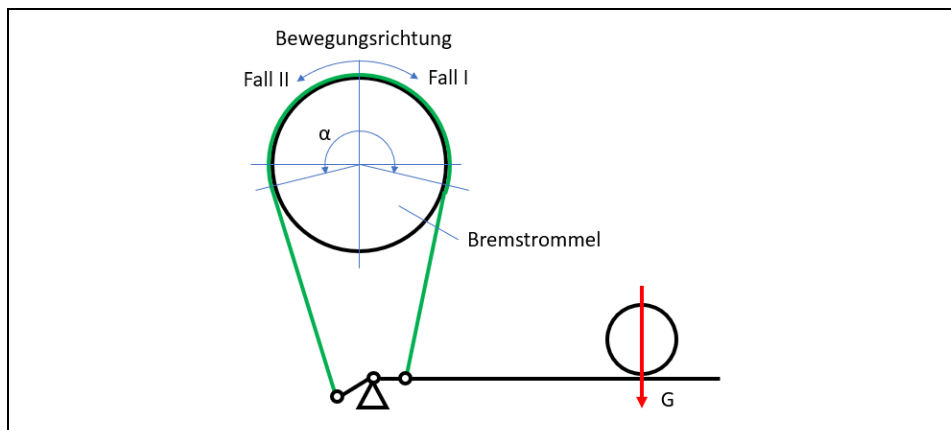


Bild 12. Differentialbremse

Für den Fall I gilt das Kräfteverhältnis (Bild 13).

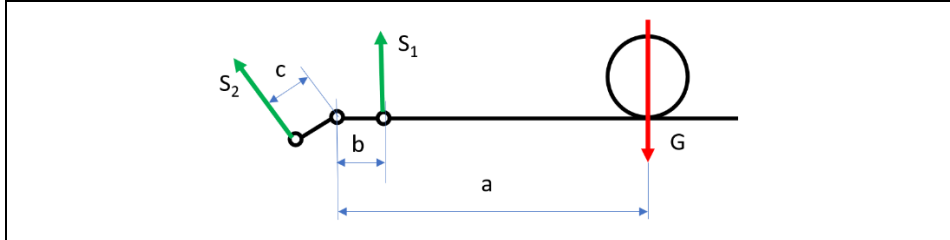


Bild 13. Kräfteverhältnis zum Fall I

$$G \cdot a + S_2 \cdot c = S_1 \cdot b \quad (50)$$

$$G \cdot a + S_1 \cdot e^{\mu\bar{\alpha}} \cdot c = S_1 \cdot b \quad (51)$$

$$S_1 = \frac{a}{b - e^{\mu\bar{\alpha}} \cdot c} \cdot G \quad (52)$$

Zwischen den Seilkräften besteht die Beziehung (Bild 14).

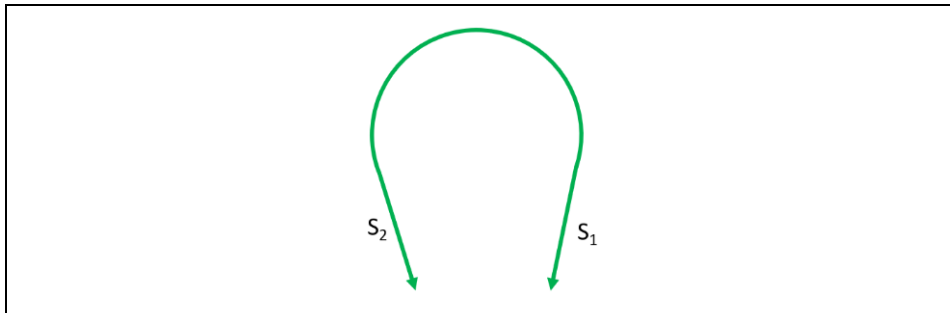


Bild 14. Seilkräfte

$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu\bar{\alpha}} \quad (53)$$

$$S_2 - S_1 = U \quad (54)$$

$$U = S_1 \cdot (e^{\mu\bar{\alpha}} - 1) \quad (55)$$

$$U = S_2 \cdot \left(\frac{e^{\mu\bar{\alpha}} - 1}{e^{\mu\bar{\alpha}}} \right) \quad (56)$$

Das Reibungsmoment beträgt somit

$$M_R = U \cdot r = S_1 \cdot (e^{\mu\bar{\alpha}} - 1) \cdot r \quad (57)$$

$$M_R = G \cdot \frac{(e^{\mu\bar{\alpha}} - 1)}{(b - e^{\mu\bar{\alpha}} \cdot c)} \cdot a \cdot r \quad (58)$$

Für den Fall II gilt das Kräfteverhältnis

$$G \cdot a + S_1 \cdot c = S_2 \cdot b. \quad (59)$$

$$G \cdot a + S_1 \cdot c = S_1 \cdot e^{\mu\bar{\alpha}} \cdot b. \quad (60)$$

$$S_1 = G \cdot \frac{a}{e^{\mu \bar{\alpha}} \cdot b - c} \quad (61)$$

$$M_R = G \cdot \frac{(e^{\mu \bar{\alpha}} - 1)}{(e^{\mu \bar{\alpha}} \cdot b - c)} \cdot a \cdot r \quad (62)$$

8 Lagerreibung

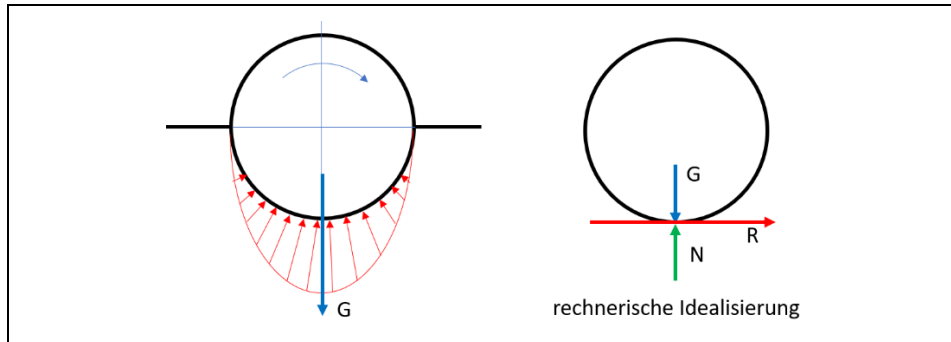


Bild 15. Realer Lagerdruck

$$R = \mu \cdot N \quad (63)$$

Das Reibmoment ist

$$M_R = r \cdot R. \quad (64)$$

8.1 Spurzapfenreibung

Das Schema zeigt ein Spurzapfenlager und seine Möglichkeiten (Bild 16).

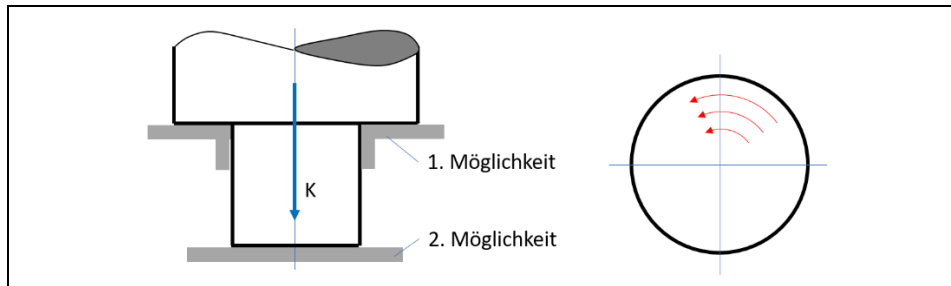


Bild 16. Schema eines Spurzapfenlagers

Die Problematik der Spurzapfenreibung: Unterschiedlicher Weg der Punkte bedeuten unterschiedliche Geschwindigkeit und unterschiedliche Arbeit. Dadurch stärkere Abnutzung am Rande und um den Mittelpunkt. Abhilfe für den Mittelpunkt ist eine Ringfläche (Bild 17).

Das strömungstechnische Verhalten des Schmiermittels spielt ebenfalls eine große Rolle.

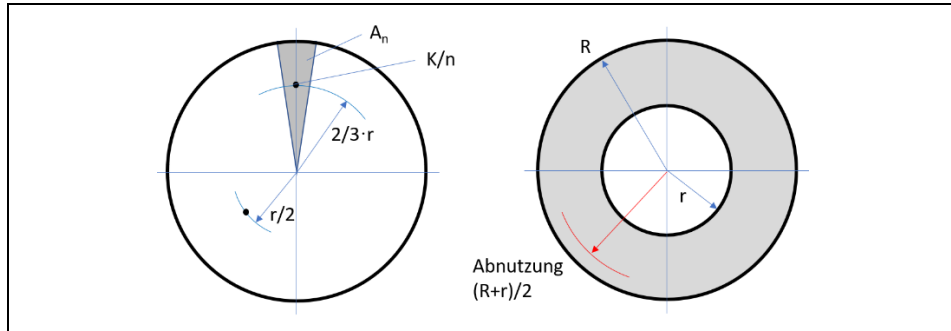


Bild 17. Reibflächen

Die Flächenpressung bestimmt sich durch

$$p = \frac{K}{A} \quad (65)$$

$$M_R = n \cdot \frac{K}{n} \cdot \frac{2}{3} \cdot r \quad (66)$$

$$M_R = K \cdot \frac{2}{3} \cdot r \text{ (für neuen Zapfen)} \quad (67)$$

$$M_R = K \cdot \frac{1}{2} \cdot r \text{ (für alten Zapfen)} \quad (68)$$

8.2 Rollreibung

Wir betrachten zwei Fälle. Beim Fall I gibt es eine Kontaktfläche (Bild 18).

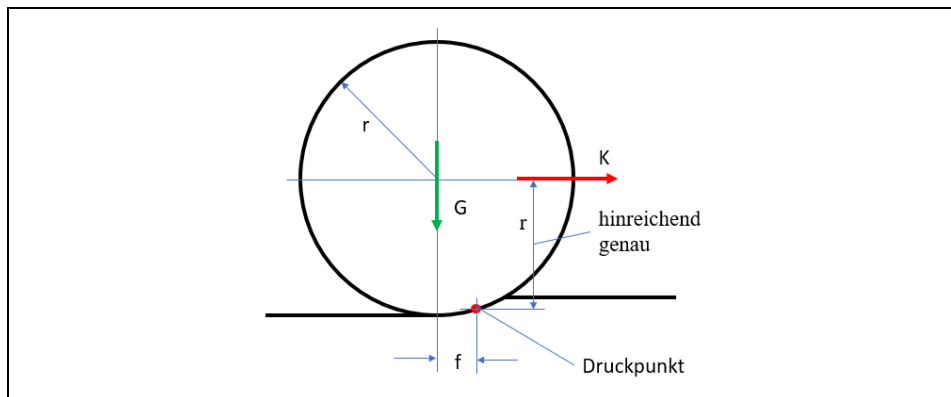


Bild 18. Rollreibung bei einer Kontaktfläche

Widerstand ergibt sich durch Verformung der Unterlage und Deformation der Rollkörper, die sich nie ganz vermeiden lässt. Widerstand bedeutet Verlust an Arbeit.

$$G \cdot f = K \cdot r \quad (69)$$

$$K = G \cdot \frac{f}{r} \quad (70)$$

(F / r) hat den Charakter des bisherigen μ . In der Autobranche mit ϕ bezeichnet, da bei Autoreifen auch der Innendruck berücksichtigt werden muss.

Beim Fall II gibt es zwei Kontaktflächen (Bild 19).

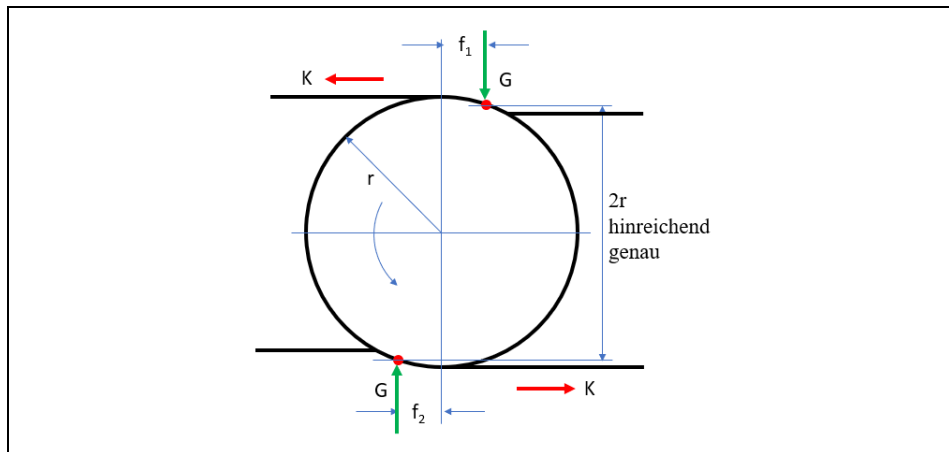


Bild 19. Rollreibung mit zwei Kontaktflächen

$$G \cdot (f_1 + f_2) = K \cdot 2 \cdot r \quad (71)$$

$$K = G \cdot \frac{f_1 + f_2}{2 \cdot r} \quad (72)$$

Bei gleichen Materialien ist $f_1 = f_2$ und dann folgt auch Gleichung (70).

8.3 Fahrwiderstand

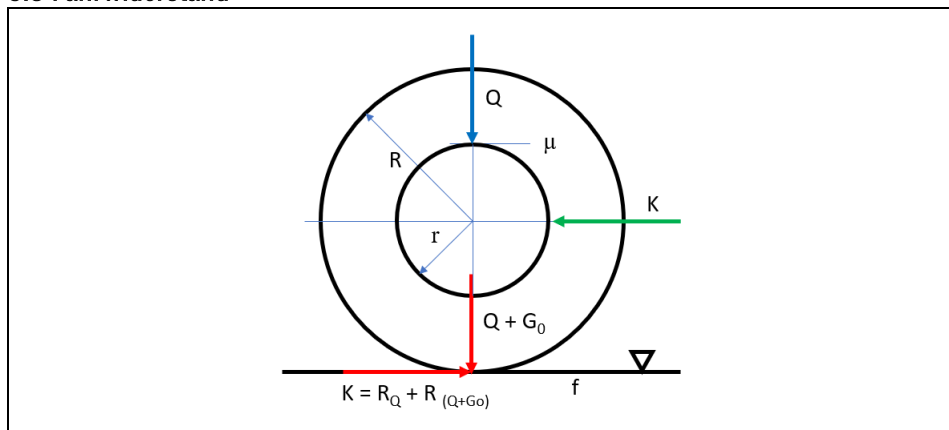


Bild 20. Kräfteverhältnisse beim Fahrwiderstand

Lagerreibung

$$R_Q = Q \cdot \mu \cdot \frac{r}{R} \quad (73)$$

Rollreibung

$$R_{Q+G_0} = (Q + G_0) \cdot \frac{f}{R}. \quad (74)$$

Durch Bremsung ergibt sich eine zusätzliche Reibkraft (sie bleibt hier unberücksichtigt)

$$K = Q \cdot \mu \cdot \frac{r}{R} + Q \cdot \frac{f}{R} + G_0 \cdot \frac{f}{R} \quad (75)$$