Excel + VBA

Schwerpunkte

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 17.07.2019

Überarbeitung: 01.12.2023

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung: Betrachtet werden Flächen und Linien, die durch Funktionen und ihren Schwerpunkt beschrieben werden.

Anwendungs-Datei:

1 Schwerpunkte von Flächen

Gegeben ist eine Funktion f(x) im Koordinatensystem (Bild 1).

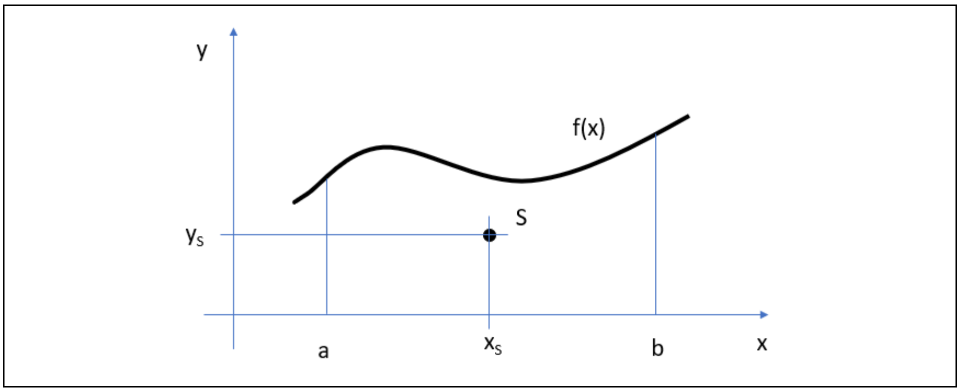

Bild 1. Flächenschwerpunkt eines Kurvenstücks

Jede Fläche A unter einem Graphen der Funktion y = f(x) im Bereich von a bis b ergibt sich aus dem bestimmten Integral

$$\mathrm{A} = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Bei der Betrachtung eines infinitesimalen Flächenelements (Bild 2)

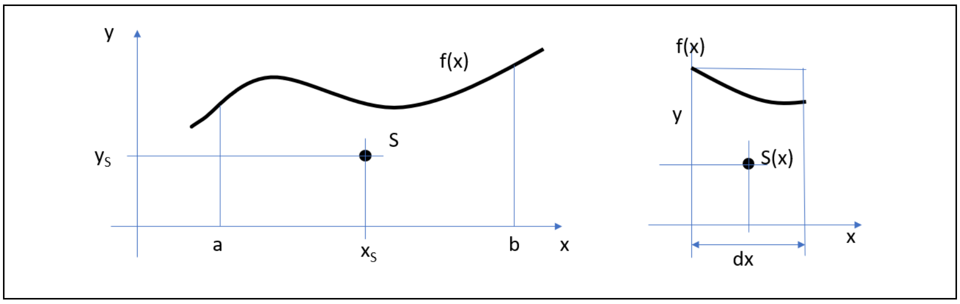

Bild 2. Betrachtung eines Flächenelements

folgt angenähert

$$\mathrm{dA} = \mathrm{y} \cdot \mathrm{dx} \tag{2}$$

Bei einer Rotation des Flächenelements um die x-Achse ergibt sich das Flächenmoment

$$dM(x) = dA \cdot \frac{y}{2} = \frac{y^2}{2} dx; \quad \frac{dM(x)}{dx} = \frac{y^2}{2} \tag{3}$$

und um die y-Achse

$$dM(y) = dA \cdot x = y \cdot x \cdot dx; \quad \frac{dM(y)}{dx} = y \cdot x. \tag{4}$$

Folglich ist

$$M(x) = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx\,; \quad M(y) = \int_a^b y \cdot x \cdot dx \tag{5}$$

Die Eigenschaft des Schwerpunkts sind die Flächenmomente

$$M(x) = A \cdot y_s; \quad M(y) = A \cdot x_s \tag{6}$$

Durch Einsetzen von A und Gleichsetzung folgt

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \cdot y_s = \frac{1}{2}\int \quad y^2 \cdot dx \tag{7}$$

und

$$\int_a^b y \cdot x \cdot dx = \int_a^b y \cdot x \cdot dx \tag{8}$$

Die Lage des Schwerpunktes bestimmt sich somit aus

$$y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx}{\int_a^b f(x)dx}; \quad x_s = \frac{\int_a^b f(x) \cdot x \cdot dx}{\int_a^b f(x)dx} \tag{9}$$

2 Schwerpunkte von Kurvenstücken

Bei Kurvenstücken erfolgt eine ähnliche Betrachtung (Bild 3)

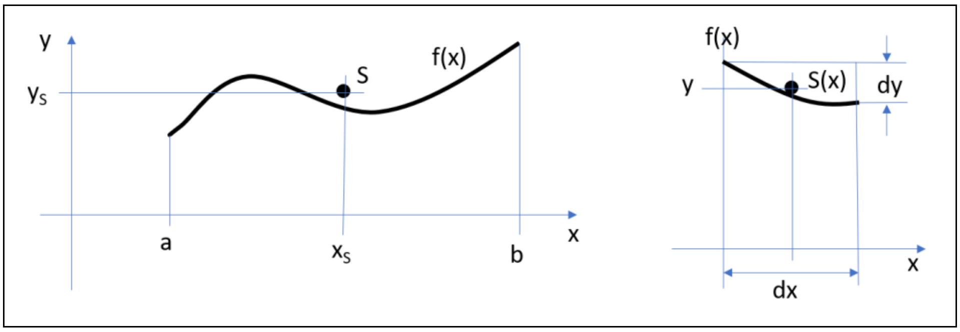

Bild 3. Betrachtung eines Kurvenelements

Die Länge des infinitesimalen Kurvenstücks bestimmt sich angenähert nach Pythagoras

$$ds^2 = dx^2 + dy^2; \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{5}$$

$$\mathrm{ds} = \sqrt{dx^2 \cdot \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} \tag{6}$$

$$\mathrm{ds} = \mathrm{dx} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad | \ \frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{7}$$

$$ds = dx \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}. \tag{8}$$

Folglich ergibt sich die Länge des Kurvenstücks aus

$$\mathrm{s} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx. \tag{9}$$

und

$$\mathrm{M(x)} = \int_a^b y \cdot ds; \quad M(y) = \int_a^b x \cdot ds. \tag{10}$$

bzw. die der infinitesimalen Elemente

$$\mathrm{M(x)} = \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx \tag{11}$$

$$\mathrm{M(y)} = \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx. \tag{12}$$

Durch Gleichsetzung und Umstellung erfolgt wiederum

$$y_s = \frac{\int_a^b y \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot dx} \tag{13}$$

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot dx} \tag{14}$$

3 Herleitung der 1. Guldinschen Regel

Die Rotation einer Fläche A mit einem Schwerpunkt S_A um eine Achse erzeugt einen gedachten Rotationskörper mit dem Volumen V (Bild 4).

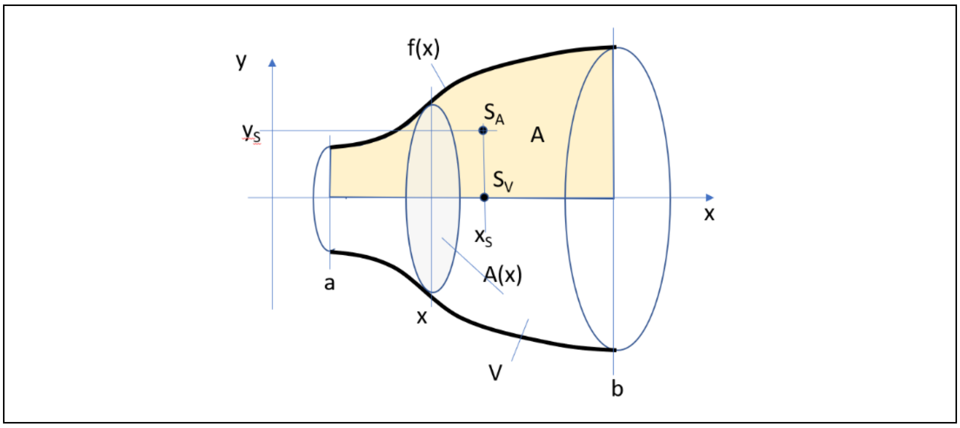

Bild 4. Rotationskörper

Das Volumen des Rotationskörpers bestimmt sich aus

$$V = \int_a^b A(x) dx \quad | \, A(x) = \pi \cdot \left(f(x)\right)^2 \tag{15}$$

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \tag{16}$$

Der Schwerpunktsabstand y_s folgt nach (9) durch Einsetzen von (1)

$$y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{1}{2A} \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \tag{17}$$

Sowohl in (16) als auch in (17) steht das gleiche Integral. Durch Umstellung und Gleichsetzung folgt

$$\left(f(x)\right)^2 dx = \frac{V}{\pi} = 2 \cdot A \cdot y_0 \qquad (18)$$

Daraus folgt die 1. Guldinsche Regel

$$V = 2 \cdot \pi \cdot y_S \cdot A. \qquad (19)$$

Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus Querschnittsfläche und dem Weg des Schwerpunkts bei einer Umdrehung um die Rotationsachse.

4 Awendung der 2. Guldinschen Regel

Zur Berechnung der Oberfläche eines Torus (Bild 5) verwenden wir die 2. Guldinsche Regel.

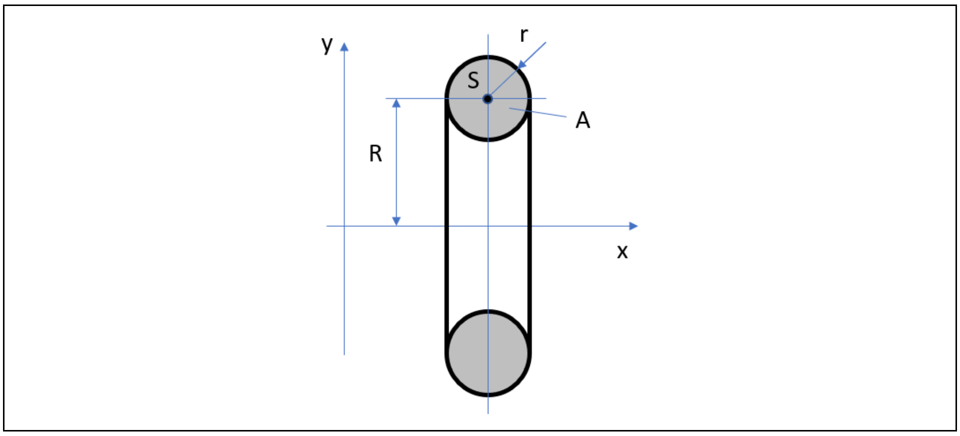

Bild 5. Die Rotation einer Kreisfläche erzeugt einen Torus

Die Oberfläche eines Rotationskörpers ist gleich der Länge des Kurvenstücks b und dem Weg seines Schwerpunkts bei einer Umdrehung um die Rotationsachse.

$$O = 2 \cdot \pi \cdot y_S \cdot b. \qquad (20)$$

Bei einem Torus ist

$$b = 2 \cdot \pi \cdot r; \quad y_S = R. \qquad (21)$$

Durch Einsetzen folgt

$$O_T = 4 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r \qquad (22)$$

die bekannte Formel aus der Literatur.

5 Anwendungsbeispiel

Wir betrachten den Rotationskörper Halbkugel, der aus einem rotierenden Viertelkreis entsteht (Bild 6). Gesucht ist das Volumen.

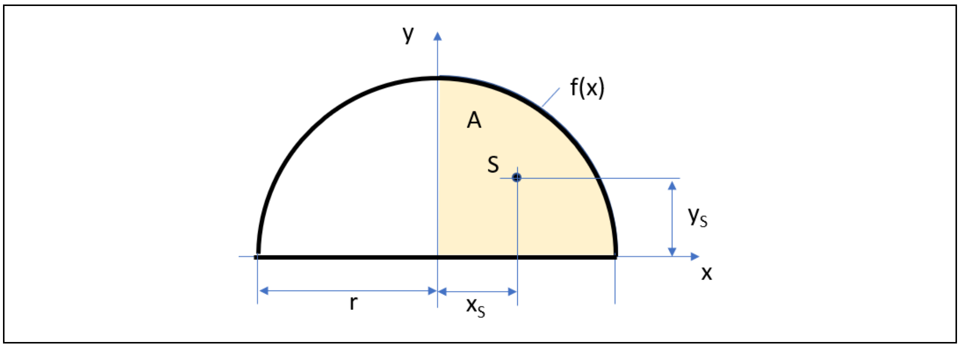

Bild 6. Rotationskörper Halbkugel

Der Graph, der die Form begrenzt, ergibt sich nach Pythagoras mit

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}. \tag{23}$$

Die Rotationsfläche besitzt den Inhalt

$$A = \frac{\pi}{4} r^2. \tag{24}$$

Der Schwerpunktsabstand ys folgt nach (17) aus

$$y_s = \frac{2}{\pi \cdot r^2} \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx \tag{25}$$

$$y_s = \frac{2}{\pi \cdot r^2} \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx \tag{26}$$

$$y_s = \frac{2}{\pi \cdot r^2} \left| r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right|_0^r \tag{27}$$

$$y_s = \frac{2}{\pi \cdot r^2} \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) \tag{28}$$

$$y_s = \frac{4 \cdot \mathrm{r}}{3 \cdot \pi \cdot} \tag{29}$$

Das Volumen folgt mit der 1. Guldinschen Regel aus

$$V = 2 \cdot \pi \cdot y_s \cdot A = 2 \cdot \pi \cdot \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{\pi}{4} r^2 \tag{30}$$

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \tag{31}$$

Auch diese Formel stimmt mit der Literatur überein.

Aufgabe:

Auf einem Excel-Arbeitsblatt soll das Volumen in Abhängigkeit vom Kugelradius als Diagramm dargestellt werden.