Dreigelenkbogen

Autor & Copyright: Dipl.-Ing. Harald Nahrstedt

Version: 2016 / 2019 / 2021 / 365

Erstellungsdatum: 17.07.2019

Überarbeitung: 01.12.2023

Quelle: Vorlesungsscript

Beschreibung: Bestimmung der Lagerkräfte bei einem Dreigelenkbogen, der als Parabel nach der Funktion $f(x) = ax^2 + bx$ ausgelegt ist. Andere Formen von Dreigelenkbögen lassen sich auf ähnliche Weise berechnen.

Anwendungs-Datei: 06-03-01_Dreigelenkbogen.xlsx

1 Dreigelenkbogen als Parabel

Gegeben ist ein Dreigelenkbogen nach der Parabel f(x) = - ax^2 + bx (Bild 1).

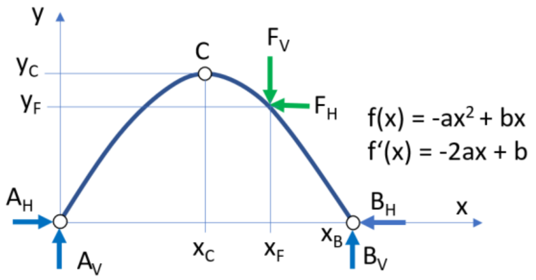

Bild 1. Dreigelengbogen als Parabel

Durch die Funktion ergeben sich die Maße

$$-a \cdot x_B^2 + b \cdot x_B = 0 \rightarrow x_B \cdot (-a \cdot x_B + b) = 0 \rightarrow x_B = \frac{b}{a} \quad (1)$$

$$f'(x_c) = -2a \cdot x_C + b = 0 \ \rightarrow x_C = \frac{b}{2a} \quad (2)$$

$$f(x_C) = y_C = -a \cdot x_C^2 + b \cdot X_C \rightarrow y_C = \frac{b^2}{4a} \quad (3)$$

$$f(x_F) = y_F = -a \cdot x_F^2 + b \cdot x_F \quad (4)$$

2 Lagerkräfte

Der Dreigelenkbogen hat neben den Gelenken in den Auflagern A und B noch ein drittes Gelenk C, in dem kein Biegemoment übertragen wird, so dass sich vier Gleichgewichtsbedingungen ergeben

$$\sum H = 0, \ \ A_H - B_H - F_H \quad (5)$$

$$\sum V = 0, \ \ A_V + \ B_v - \ F_V \quad (6)$$

$$\sum M_A = 0, \ \ x_B \cdot B_v - x_F \cdot F_V + y_F \cdot F_H = 0 \quad (7)$$

$$\sum M_C = 0, \ \ y_C \cdot A_H - x_C \cdot A_V = 0. \quad (8)$$

Da F gegeben ist, bestimmt sich aus Gleichung (3)

$$B_V = \frac{1}{x_B}(x_F \cdot F_v - y_F \cdot F_H). \quad (9)$$

Aus Gleichung (2) folgt danach

$$A_V = F_V - B_V. \quad (10)$$

Aus Gleichung (4) folgt weiter

$$A_H = \frac{x_C}{y_C} A_V. \quad (11)$$

Aus Gleichung (1) ergibt sich letztlich

$$B_H = A_H - F_H. \tag{12}$$

3 Schnittgrößen

Denkt man sich den Bogen an der Stelle x aufgeschnitten, so müssen dort ebenfalls die Gleichgewichtsbedingungen gelten (Bild 2). Aus Σ M = 0 folgt

$$M_x - A_V \cdot x + A_H \cdot f(x) = 0 \rightarrow M_x = A_V \cdot x - A_H \cdot f(x). \tag{13}$$

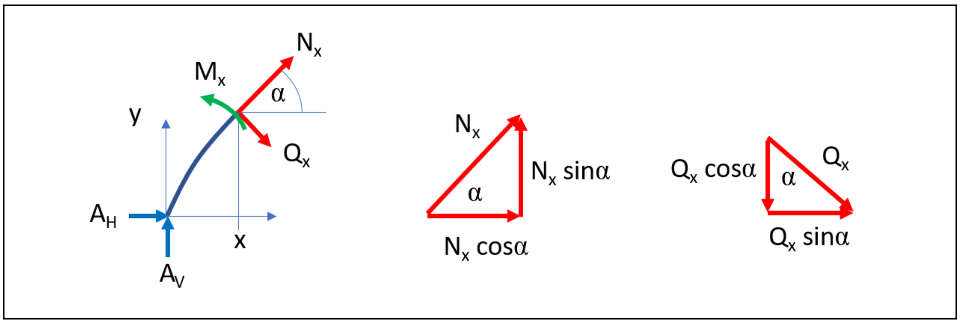

Bild 2. Gleichgewichtsbedingungen an der Trennstelle x

Aus Σ H = 0 folgt

$$A_H + N_H + Q_H = 0 \rightarrow A_H + N_x \cdot \cos\alpha + Q_x \cdot sin\alpha = 0, \tag{14}$$

und aus Σ V = 0

$$A_V + N_V - Q_V = 0 \rightarrow A_V + N_x \cdot sin\alpha - Q_x \cdot cos\alpha = 0. \tag{15}$$

Aus Gleichung (15) folgt durch Umstellung

$$Q_x = \frac{A_V + N_x \cdot sin\alpha}{cos\alpha}. \tag{16}$$

und Einsetzen in Gleichung (14)

$$A_H + N_x \cdot \cos\alpha + \frac{A_V + N_x \cdot sin\alpha}{cos\alpha} \cdot sin\alpha = 0 \rightarrow N_x = -A_H \cdot cos\alpha - A_V \cdot sin\alpha. \tag{17}$$

Da die Ableitung der Funktion an der Stelle x gleich dem Tangens von α entspricht, ist

$$\alpha = \arctan\,(-2a \cdot x + b). \tag{18}$$

4 Arbeitsblatt

Im Arbeitsblatt sind die grün gekennzeichneten Felder Eingabewerte (Bild 3) und die gelben Felder enthalten berechnete Werte.

	A	B	C	D	E	F
1	a =	0,2	m	x_B =	10	m
2	b =	2	m	x_C =	5	m
3				y_C =	5	m
4						
5	x_F =	7	m	y_F =	4,2	m
6	F_H =	3	kN	A_V =	2,46	kN
7	F_V =	4	kN	A_H =	2,46	kN
8				BV =	1,54	kN
9				BH =	-0,54	kN
10						
11	x =	3	m	α(x) =	0,67474	bog
12				α(x) =	38,6598	grad
13				M(x) =	-2,952	kNm
14				Q(x) =	0,38419	kN
15				N(x) =	-3,4577	kN

Bild 3. Arbeitsblatt

Tabelle 1. Bereichsnamen und Formeln

Bereich	Name		Bereich	Name	Formel
B1	a		E1	xB	=b/a
B2	b		E2	xC	=b/(2*a)
			E3	yC	=b^2/(4*a)
B5	xF		E5	yF	=-a*xF^2+b*xF
B6	FH		E6	AV	=FV-BV
B7	FV		E7	AH	=xC/yC*AV
			E8	BV	=(xF*FV-yF*FH)/xB
			E9	BH	=AH-FH
B11	X		E11	alpha	=ARCTAN(-2*a*x+b)
			E12		=GRAD(alpha)
			E13		=AV*x-AH*(-a*x^2+b*x)
			E14		=(AV+Nx*SIN(alpha))/COS(alpha)
			E15		=-AH*COS(alpha)-AV*SIN(alpha)

Mit der Parabel-Funktion lässt sich anschaulich der Dreigelenkbogen in einem XY-Diagramm darstellen (Bild 4).

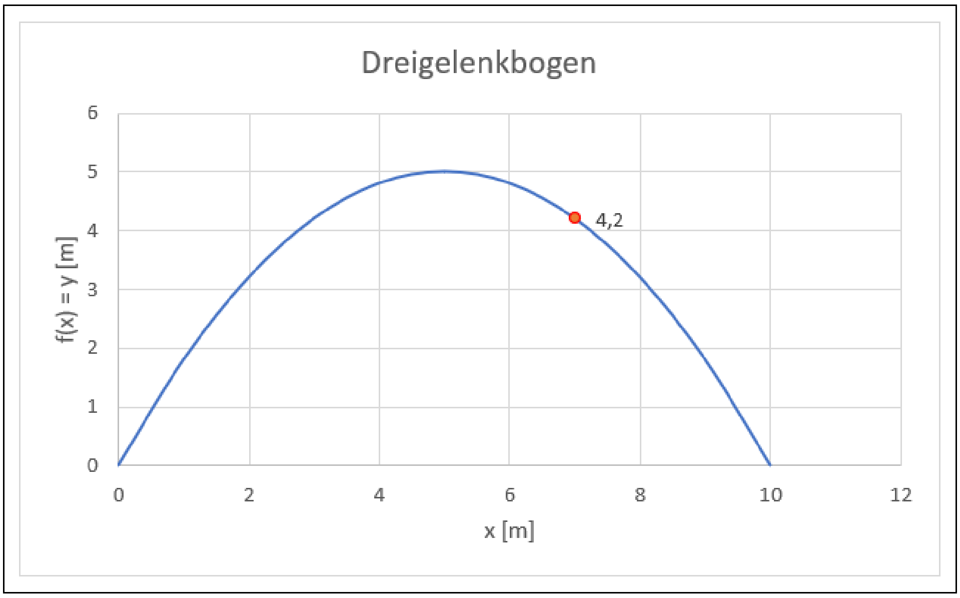

Bild 4. Verlauf der Parabel