6 Technische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

6.1 Die Binominalverteilung

Diese Verteilung wird auch als Bernoullische oder Newtonsche Verteilung bezeichnet. Dabei handelt es sich um eine diskrete Wahrscheinlichkeitsfunktion mit der Definition

$$P_n(k) = \left(\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \right) \cdot p^k \cdot (1-p)^{(n-k)} . \tag{6.1}$$

Darin ist

- n die Anzahl Versuche
- k die Anzahl Versuche, nach denen das Ereignis eintreten soll
- p die Wahrscheinlichkeit, mit der das Ereignis im Einzelversuch auftritt
- P die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis bei n Versuchen k mal eintritt

Tabelle 6-1 Struktogramm zur Binominalverteilung

<table>
<tr><td colspan="4">Eingabe n, k, p</td></tr>
<tr><td colspan="4">a(1) = n</td></tr>
<tr><td colspan="4">a(2) = k</td></tr>
<tr><td colspan="4">a(3) = n-k</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Bestimmung der
Fakultäten</td><td colspan="3">i=1, 1, 3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ist a(i) = 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nein</td><td>Ja</td></tr>
<tr><td colspan="2">f = 1</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2">j = 1, 1, a(i)</td></tr>
<tr><td></td><td>f = f * j</td></tr>
<tr><td colspan="2">a(i) = f</td></tr>
<tr><td colspan="4">P=a(1)/(a(2) *a(3)) * p ^ k * (1-p) ^ (n-k)</td></tr>
</table>

Entgegen der Vorgabe von k im Struktogramm, lassen wir im Programm k von 0 bis n laufen und erhalten so das Verteilungsgesetz auch in grafischer Form.

Codeliste 6.1 Prozedur Binominalverteilung

```
Option Explicit
Sub Binominal()
   Dim i, j, n, k  As Long
   Dim p, a(3), Pb, f As Double
   n = Cells(1, 1)
   p = Cells(2, 1)
   For k = 0 To n
      a(1) = n
      a(2) = k
      a(3) = n - k
      For i = 1 To 3
         If Not a(1) = 0 Then
            f = 1
            For j = 1 To a(i)
               f = f * j
            Next j
            a(i) = f
         End If
      Next i
      Pb = a(1) / (a(2) * a(3)) * p ^ k * (1 - p) ^ (n - k)
      Cells(3 + k, 1) = k
      Cells(3 + k, 2) = Pb
   Next k
End Sub
```

	A	B	C	D	E	F	G
1	20	0,33					
2							
3	0	0,00033227					
4	1	0,00327314					
5	2	0,01531539					
6	3	0,04526039					
7	4	0,09474284					
8	5	0,14932602					
9	6	0,1838716					
10	7	0,18112724					
11	8	0,14496938					
12	9	0,09520377					
13	10	0,05158055					
14	11	0,02309577					
15	12	0,00853165					
16	13	0,00258594					
17	14	0,00063684					
18	15	0,00012547					
19	16	1,9312E-05					
20	17	2,238E-06					
21	18	1,8372E-07					
22	19	9,5251E-09					
23	20	2,3457E-10					

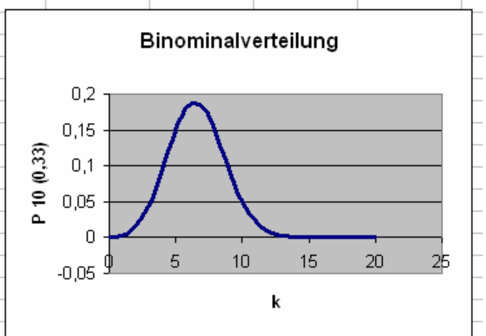

Bild 6-1 Binominalverteilung für n=20 und k=0,…,20

6.2 Warteschlangenproblem Maschinenwartung

Für eine weitere probabilistische Simulation betrachten wir eine Person, die einige Maschinen bedient. Dann kann sie sich beim Ausfall mehrerer Maschinen immer nur um eine kümmern. Erst wenn diese wieder funktioniert, kann sie sich um die nächste ausgefallene Maschine kümmern. Bedient diese Person nun zu viele Maschinen, so kann es zu einem erheblichen Produktionsausfall kommen. Umgekehrt ist die Person bei zu wenigen Maschinen nicht voll beschäftigt.

Der Ausfall von Maschinen ist zufällig. Mittels Langzeitstudien kann man jedoch eine gewisse Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben. Nehmen wir an, es sei eine Anzahl n Maschinen gegeben, die von einer Person bedient werden. Wir betrachten einen längeren Zeitraum in Zeitschritten Δt. Wir nehmen weiterhin an, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $x \cdot \Delta t$ eine Maschine in Δt ausfällt. Ebenso sei die Wahrscheinlichkeit $y \cdot \Delta t$ gegeben, dass innerhalb von Δt die Reparatur wieder beendet ist. Die letzte Wahrscheinlichkeit w steht dafür, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt t sich m Maschinen in der Warteschlange befinden. Setzt man

$$\lim_{t \to \infty} w(t) = w_m ,$$

so ergibt sich ein System von Differenzengleichungen

$$y \cdot w_1 = m \cdot x \cdot w_0$$

$$y \cdot w_{m+1} = [x(n-m) + y]w_m - x(n-m+1)w_{m-1} \quad \text{für m=2,3,4,…}$$

Erkennbar ist die Rekursionsformel

$$y \cdot w_{m+1} = x(n-m)w_m .$$

Da diese mit Fakultät wächst, kann es bei der exakten Lösung dieses Gleichungssystems schnell zu einem erheblichen, wenn nicht sogar undurchführbaren Rechenaufwand kommen, den man bei der probabilistischen Simulation umgeht.

Zur Umsetzung denken wir uns einen Zweitraum, in dem wir den Ablauf betrachten. Wichtig ist, dass er hinreichend groß ist, so dass wir eine richtige Aussage vom Geschehen erhalten.

Tabelle 6-2 Struktogramm zur Maschinenwartung

Eingabe der erforderlichen Parameter: Δt als Zeitintervall in Sekunden t_{max} als Betrachtungszeitraum in Sekunden $w_1 \in [0,1)$ Wahrscheinlichkeit für den Ausfall einer Maschine in Δt $w_2 \in [0,1)$ Wahrscheinlichkeit für die Reparatur einer Maschine in Δt
Randomize
Startbedingung w=0, z=0

<table>
<tr><td rowspan="12">Berechnungs-
schleife</td><td colspan="4">t=1, 1, t_{max}</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ausfallwahrscheinlichkeit
x=Rnd(x)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ist eine Maschine ausgefallen?
Ist x<=w_1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ja</td><td>nein</td></tr>
<tr><td colspan="3">Maschine gelangt in die Warteschlange
w=w+1</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Sind Maschinen in der Warteschlange?
w>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">ja</td><td colspan="2">nein</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reparaturwahrscheinlichkeit
x=Rnd(x)</td><td colspan="2" rowspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Ist eine Maschine repariert?
x<=w_2</td></tr>
<tr><td>ja</td><td>nein</td></tr>
<tr><td>w=w-1</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Ausgabe t, w</td></tr>
</table>

Codeliste 6.2 Prozedur Maschinenwartung

```
Option Explicit
Private Sub Maschinenwartung()
   Dim dt, t, tm, z1, z2, x, w1, w2 As Double
   Dim w, i, j As Integer
   dt = Cells(1, 1)
   tm = Cells(2, 1)
   w1 = Cells(3, 1)
   w2 = Cells(4, 1)
   Randomize
   x = 0.5
   w = 0
   i = 0
   j = 0
   For t = 0 To tm Step dt
      x = Rnd(x)
```

```
      If x <= w1 Then
         w = w + 1
      End If
      If w > 0 Then
         x = Rnd(x)
         If x <= w2 Then
            w = w - 1
         End If
      End If
      i = i + 1
      If w = 0 Then j = j + 1
      Cells(i, 2) = t
      Cells(i, 3) = w
   Next t
   Cells(1, 4) = j
End Sub
```

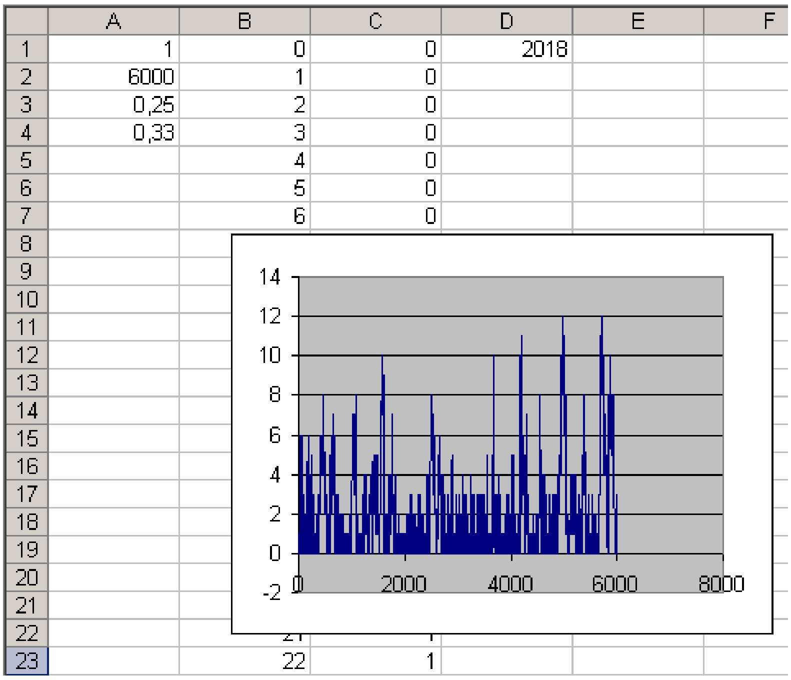

Bild 6-2
Maschinenwartung mit Beispieldaten

Die Simulation über 100 Minuten mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 0,25 und einer Reparaturwahrscheinlichkeit von 0,33 zeigt Spitzenwerte von bis zu 12 Maschinen in der Warteschlange. Sie zeigt aber auch, dass die Warteschlange immer wieder abgearbeitet werden kann. Außerdem ist der Betrachtungszeitraum gering. Es ist nicht ausgeschlossen, dass die Menge in der Warteschlange noch größer werden kann.